Agnès Rigny www.mathssansstress.fr

Les cartes mentales ou Mind-Map

Le cerveau et les cartes mentales

Ton cerveau est composé de **deux hémisphères**, reliés entre eux. Les cerveaux droit et gauche. Même si on découvre avec les avancées des neurosciences que cela ne se passe pas aussi caricaturalement que ce que je vais dire**, le cerveau droit et le cerveau gauche** ne servent pas aux mêmes choses. Le cerveau gauche s'occupe des concepts, de la logique et du raisonnement et le cerveau droit de l'intuition et de la créativité. Les cartes mentales font appel aux deux cerveaux et ça c'est parfait pour **booster la mémorisation**. En effet dans une carte mentale, les idées sont organisées et reliées entre elles, ordonnées, ce qui fait le bonheur du cerveau gauche, et les couleurs, les dessins, le côté « carte » fait appel à la créativité du cerveau droit.

Le cerveau est composé d'approximativement cent milliards de neurones, et l'information sous forme d'impulsion électrochimique circule d'un neurone à l'autre. Ils fonctionnent en réseau. Tu peux déjà remarquer que la carte mentale reproduit un mini réseau neuronal. C'est une des raisons qui la rendent si **efficace pour l'apprentissage**.

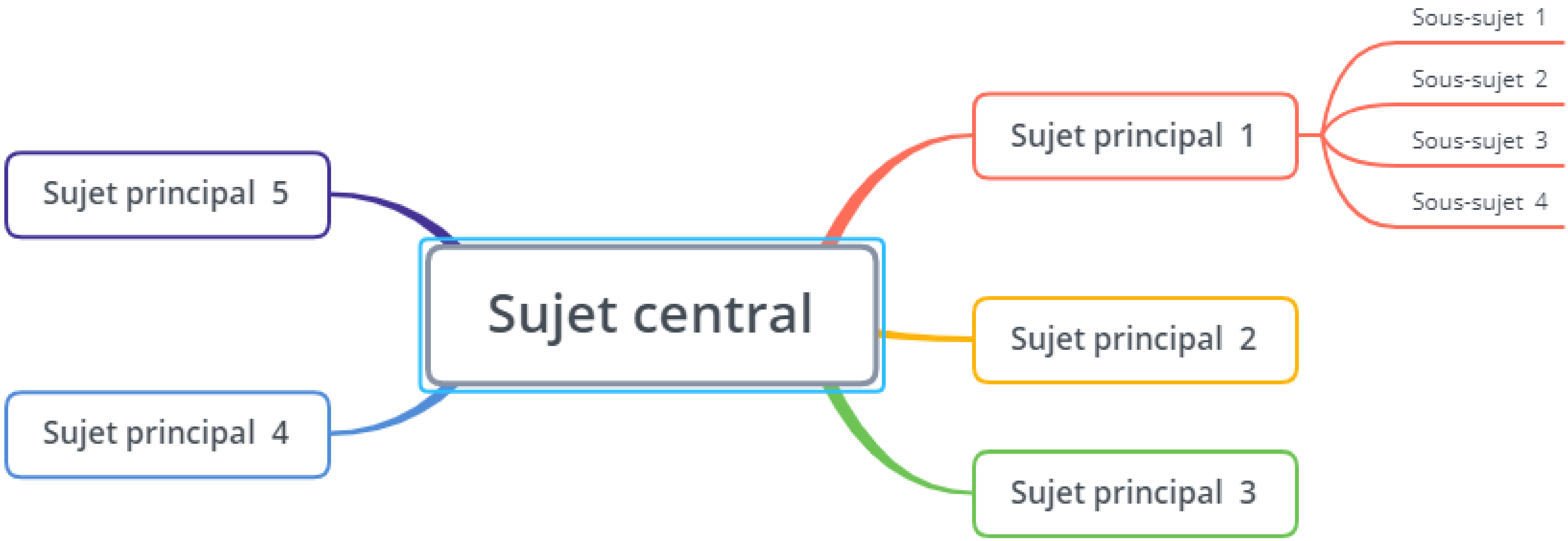
Comment on utilise une carte mentale

Ce qui est particulièrement intéressant avec une carte mentale, c'est de **la construire**. Car pendant ce temps-là, tu travailles activement, beaucoup plus activement que si tu relis ou recopies ton cours. C'est aussi l'occasion de laisser libre cours à **ta créativité** : il n'y a donc pas « une » bonne façon de faire une carte mentale à toi de te l'approprier et de trouver une façon qui te convienne et soit efficace pour toi. Tu les feras pour toi, donc ce n'est pas nécessaire qu'elles soient compréhensibles par d'autres.

La carte mentale centrée.

Elle est structurée autour d'un thème, qui représente **le noyau central**. De ce noyau partent plusieurs branches, chacune développant un sous-thème, puis de chaque sous-thème des liens vers d'autres. Pour ma part, j'aime bien les lire en commençant en haut à droite, et ensuite dans le sens des aiguilles d'une montre, mais pas d'obligation. On peut également faire des liens entre différentes sous parties. Quand on dessine une carte mentale, on représente concrètement les liens et ça nous aide à **comprendre et à apprendre**.

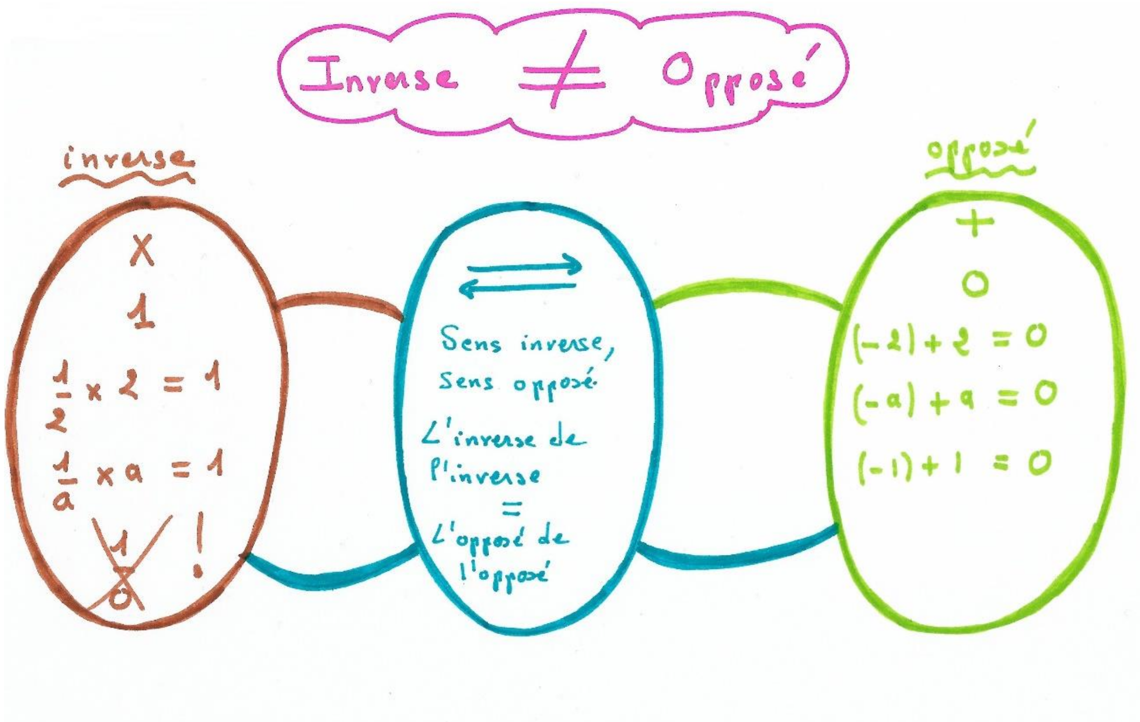
Tout est permis : on peut mettre un symbole à la pace d'un mot, barrer des mots pour exprimer l'idée contraire, faire des schémas, écrire de plusieurs couleurs, ce qui aidera la mémorisation.



Cette carte a été créée avec le logiciel XMind, partiellement gratuit.

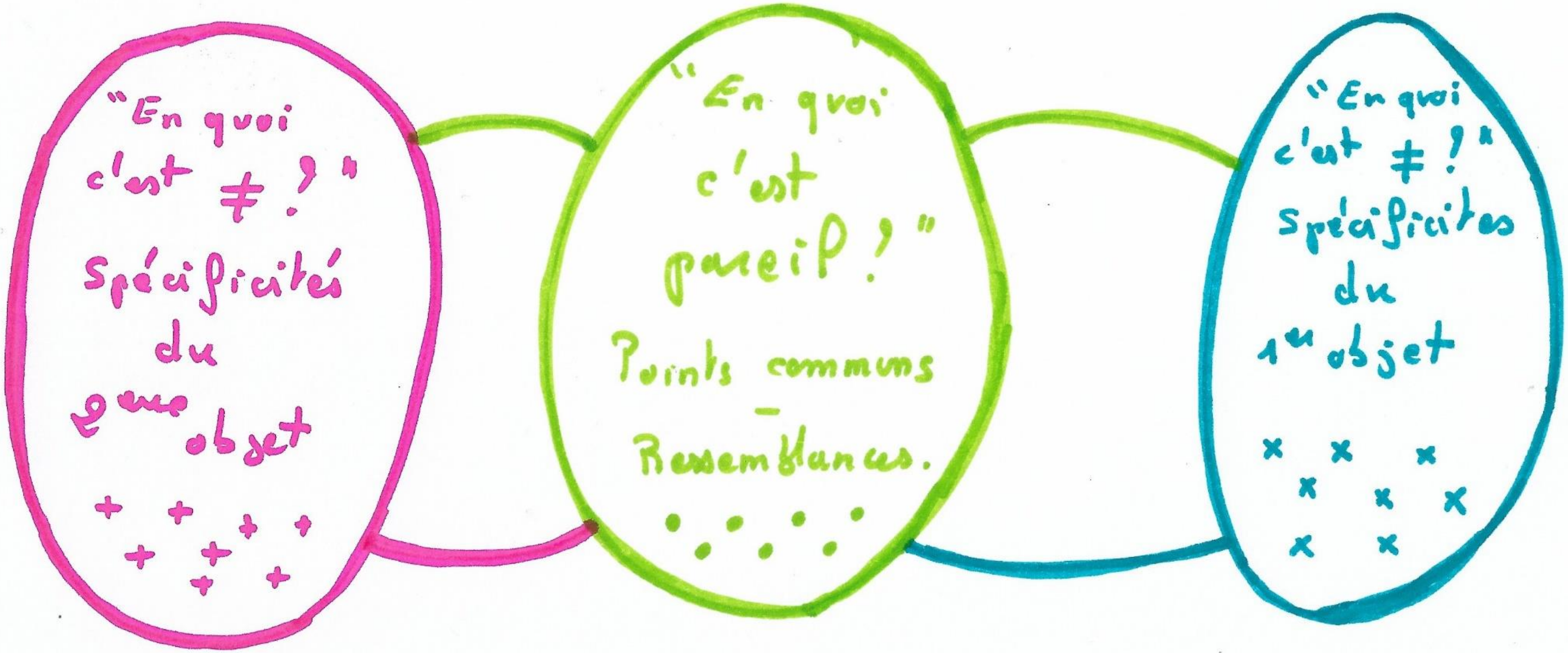
La carte à bulle

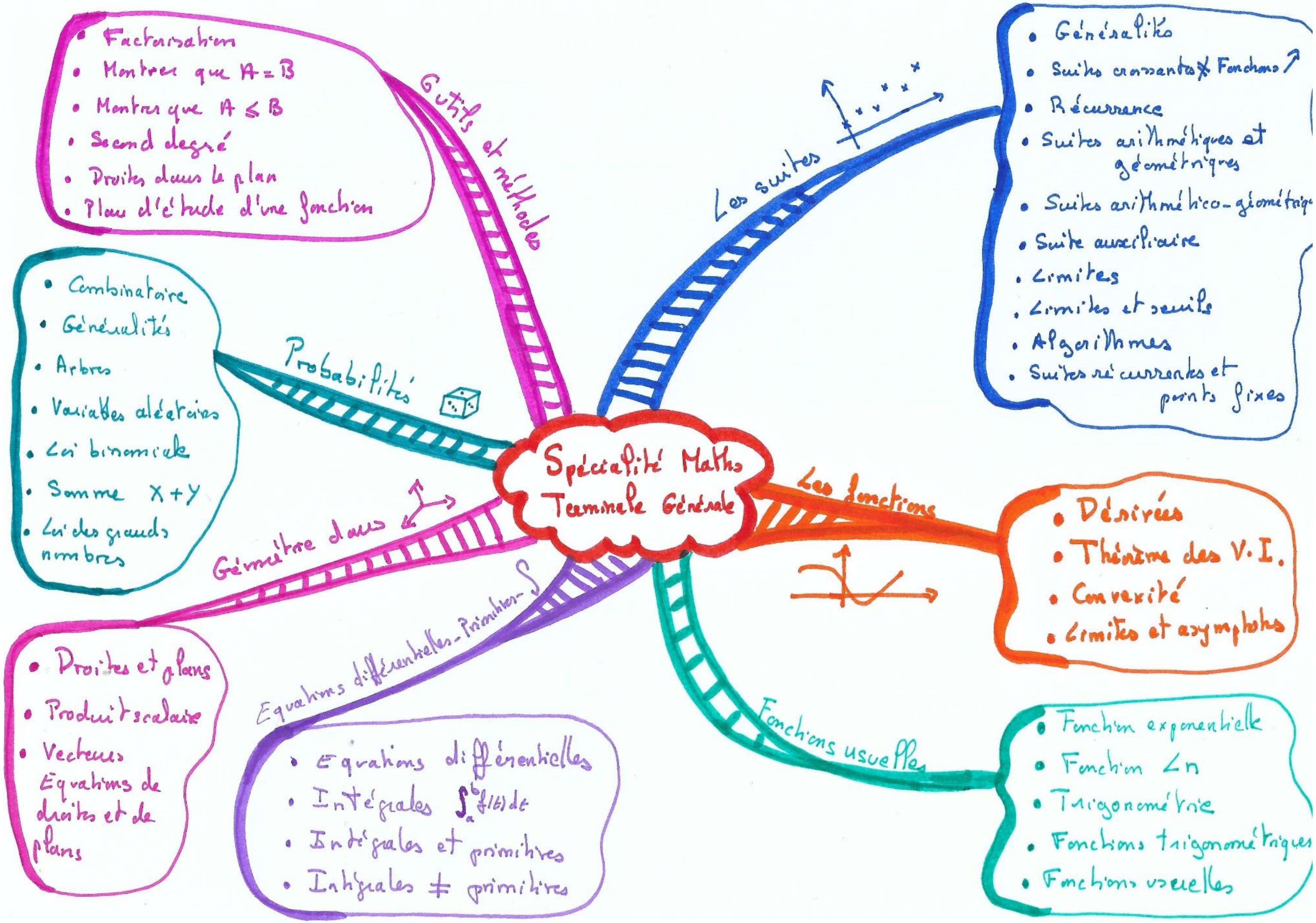
C'est un « outil graphique », très pratique quand tu confonds deux notions, ou quand tu veux comparer deux situations.



Par exemple, souvent les élèves confondent « inverse » et « opposé ». Quand on confond deux choses, il y a forcément une raison. Si on ne sait pas pourquoi, on n'arrivera pas à s'y retrouver. Dans notre cas, «inverse » et «opposé », en français c'est tout à fait synonyme. « Je vais dans le sens inverse », ou « je vais dans le sens opposé » ça veut dire la même chose. Cela explique la confusion. **Mais en maths, c'est très différent**. L'inverse c'est pour la multiplication et l'opposé c'est pour l'addition. -2 est l'opposé de 2 alors de l'inverse de 2 c'est ½. Mais un point commun c'est que « l'opposé de l'opposé c'est le nombre », et « l'inverse de l'inverse c'est le nombre ». Tout cela c'est beaucoup plus clair sur un schéma. Et le fait de faire le schéma, ça oblige aussi à se poser des questions. **Et se poser des questions, c'est la base de tout apprentissage !**

Pour comparer ou pour choisir




Spécialité Maths
Terminale Générale
Outils et méthodes
• Factorisation
• Montrer que A = B
• Montrer que A ≤ B
• Second degré
• Droites dans le plan
• Plan d'étude d'une fonction
Probabilités
• Combinatoire
• Généralités
• Arbres
• Variables aléatoires
• Loi binomiale
• Somme X + Y
• Loi des grands nombres
Géométrie dans
• Droites et plans
• Produit scalaire
• Vecteurs
Équations de droites et de plans
Équations différentielles _ Primitives _ ∫
• Équations différentielles
• Intégrales $\int_a^b f(t)\,dt$
• Intégrales et primitives
• Intégrales ≠ primitives
Les suites
• Généralités
• Suites croissantes ≠ Fonctions ↗
• Récurrence
• Suites arithmétiques et géométriques
• Suites arithmético-géométriques
• Suite auxiliaire
• Limites
• Limites et seuils
• Algorithmes
• Suites récurrentes et points fixes
Les fonctions
• Dérivées
• Théorème des V.I.
• Convexité
• Limites et asymptotes
Fonctions usuelles
• Fonction exponentielle
• Fonction Ln
• Trigonométrie
• Fonctions trigonométriques
• Fonctions usuelles

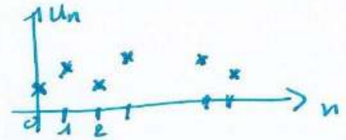
Les suites

- Généralités
- Suites croissants vs fonctions croissantes
- Récurrence
- Suites arithmétiques et géométriques
- Suites arithmético-géométriques
- Suite auxiliaire
- Limites
- Limites et seuils
- Algorithmes
- Suites récurrentes et points fixes

Agnès Rigny www.mathssansstress.fr

Suites
généralités
(U_n)

Quoi ?

- $u_0, u_1, u_2, u_3, \dots\dots\dots$ des nombres qui se $\boxed{\text{suivent}}$
- $n \longmapsto u_n$ (fonction)
- 

- "La suite des décimales de π" :

(3) 1, 4, 1, 5, 9, 2, 6, 5, 3, ...

(pas de formule, pas de logique)

- En exercice définie par
  - × Par récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$

    ex : $u_{n+1} = 3 + u_n$
  - × Explicitement, par une formule explicite $u_n = f(n)$

    ex : $u_n = 3n^2 + \sqrt{n}$

Dans les exercices

- Montrer qu'elle est majorée (minorée)

  il existe M tel que pour tout n, $u_n \leq M$ ($u_n \geq M$)
- majorée + minorée = bornée
- Montrer qu'elle est croissante (décroissante)

  Pour tout n, $u_n \leq u_{n+1}$ ($u_n \geq u_{n+1}$)
- Passer d'une formule de récurrence à une formule explicite
- Trouver la limite quand $n \to +\infty$
- Trouver un seuil :

  ex : n_0 pour que $u_n \geq 10$ pour $n \geq n_0$

Dans la vie

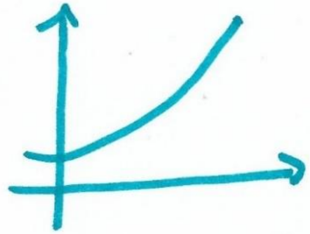
- Suite des températures
- Evolution de la taille d'un enfant, d'une population
- Evolution du capital d'un compte épargne
- Tout phénomène mesuré régulièrement dans le temps.

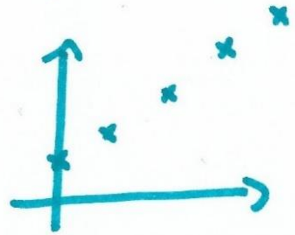
Agnès Rigny www.mathssansstress.fr

Fonction croissante ou Suite croissante

Suites

- Pour tout n, $u_n \le u_{n+1}$.
- Signe de $u_{n+1} - u_n$
- Récurrence





$a \le b \Rightarrow f(a) \le f(b)$

$n \le p \Rightarrow u_n \le u_p$

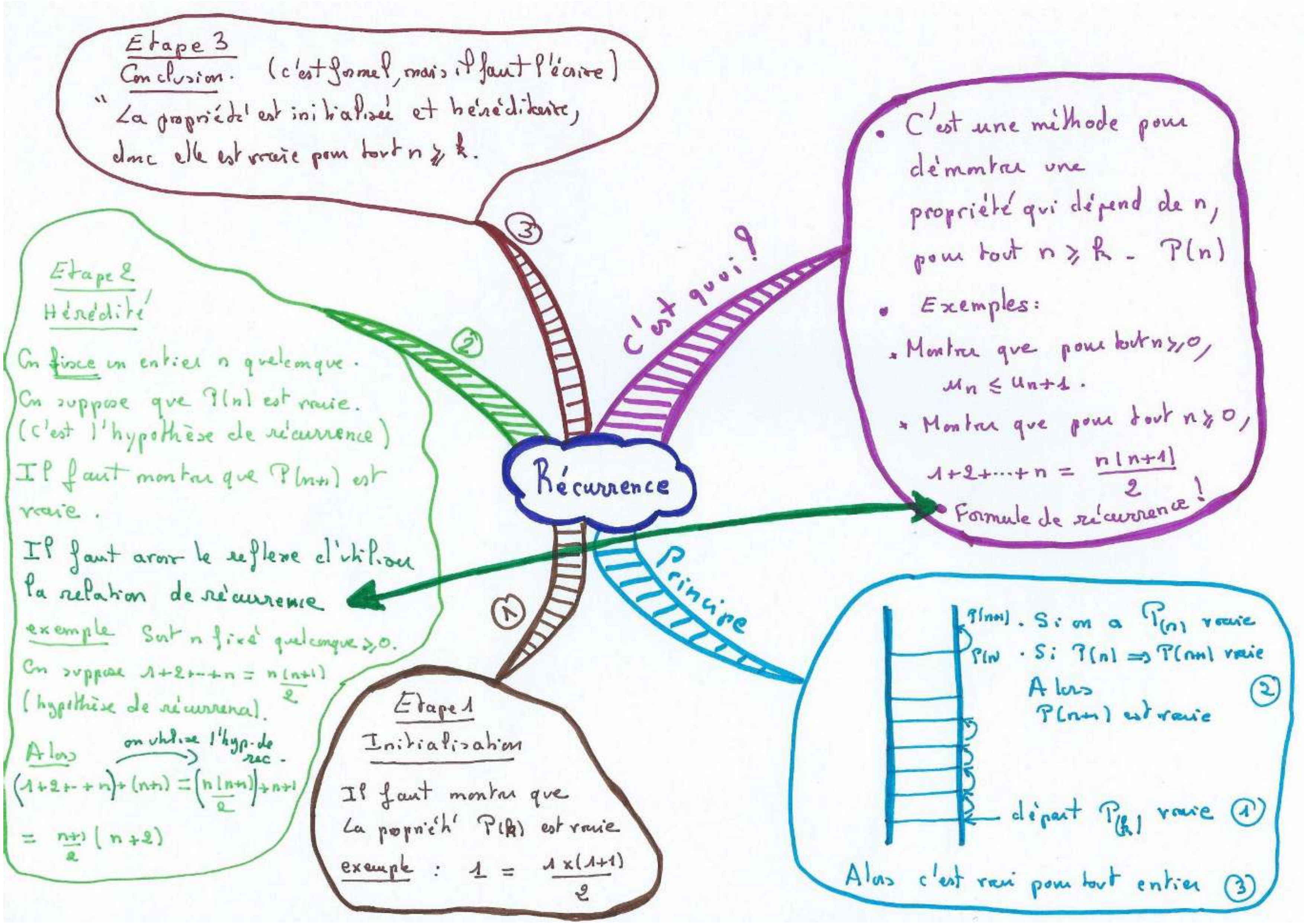
Fonctions

On peut calculer f'

$f' \geq 0 \Rightarrow f \nearrow$

x	α	β
f'	+	
f	$\nearrow$	

Agnès Rigny www.mathssansstress.fr



Suites

- Définies par récurrence
- Forme explicite connue
- Servent de suites auxiliaire pour passer de $u_{n+1} = f(u_n)$ à $u_n = g(n)$

Arithmétiques +

Définition : $u_{n+1} = \underbrace{r}_{\text{la raison}} + u_n$

Propriétés :
$u_n = u_0 + nr$
$u_n = u_1 + (n-1)r$
$u_n = u_p + (n-p)r$

Somme : $1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

$u_0+u_1+\dots+u_n = (n+1)u_0 + r\,\frac{n(n+1)}{2}$

$p<n$: $u_p+\dots+u_n = (n-p+1)\,\frac{u_p+u_n}{2}$

Limites :
Si $r>0$ $\quad u_n \to +\infty$
Si $r<0$ $\quad u_n \to -\infty$

Variations
$(u_n) \nearrow \iff r \geq 0$
$(u_n) \searrow \iff r \leq 0$

Géométriques ×

Définition : $u_{n+1} = \underbrace{q}_{\text{la raison}} \times u_n$ $\quad (q \neq 1, \neq 0)$

Propriétés :
- $u_n = q^n u_0$
- $u_n = q^{n-1} u_1$
- $u_n = q^{n-p} u_p$

Somme : $1+q+\dots+q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

$p<n$: $u_p+\dots+u_n = u_p \times \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$

Limites :
$q^n \to 0 \iff |q| < 1$
$q^n \to +\infty \iff q > 1$

Variations : Si $q>0$!
$(q^n) \nearrow \iff q > 1$
$(q^n) \searrow \iff 0 \leq q < 1$

Suites arithmético-géométriques

Exemples :

- On place un capital à 4% et chaque année on rajoute 100€ : $C_{n+1} = 1,04\, C_n + 100$
- La population perd 5% des individus par décès et en gagne 3500 chaque année.
  $U_{n+1} = 0,95\, u_n + 3500$

C'est quoi ?

- $U_{n+1} = a\, U_n + b$
  a, b réels
- Si $a = 0$: $u_n = b$ pour $n \geq 1$
  Si $b = 0$: suite géo.
  Si $a = 1$: suite arith.

Limite

- Si $-1 < a < 1$:
  $u_n \to \ell$
- Si $a > 1$ et $u_0 - \ell > 0$:
  $u_n \to +\infty$
- Si $a > 1$ et $u_0 - \ell < 0$
  $u_n \to -\infty$

Expression

Si $a \neq 1$:

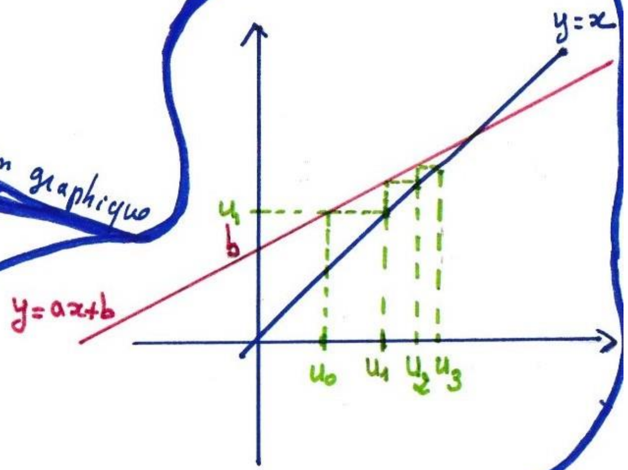
On pose $\ell = \dfrac{b}{1-a}$.

Pour $n \geq 0$, on pose $v_n = u_n - \ell$.

On a $v_{n+1} = a\, v_n$, donc $v_n = v_0\, a^n$.

Donc $u_n = \ell + (u_0 - \ell)\, a^n$.

Représentation graphique



Suite auxiliaire

Exemple

- $u_0 = 2$, $u_{n+1} = 3u_n - 2$.

$v_n = u_n - 1$.

Montrer que (v_n) est géométrique, en déduire u_n en fonction de n.

① → ② : $v_{n+1} = u_{n+1} - 1$

② → ③ : $v_{n+1} = (3u_n - 2) - 1$

$v_{n+1} = 3u_n - 3$

③ → ④ : On a $u_n = v_n + 1$

donc $v_{n+1} = 3(v_n + 1) - 3 = 3v_n$.

D'où $v_n = 3^n v_0$, $u_n = 3^n(2-1)+1 = 3^n + 1$

C'est quoi ?

- Une suite définie en fonction d'une autre, qui va servir d'intermédiaire.
- Exemple :

$(u_n) : \begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 3u_n - 2 \end{cases}$

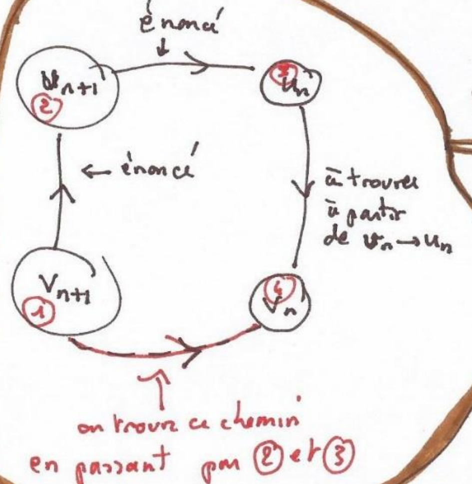
et (v_n) :

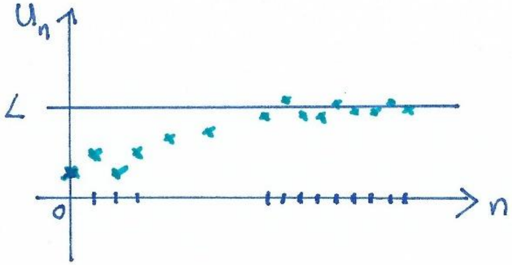
$\underbrace{v_n = u_n - 1}_{\text{la suite auxiliaire}}$.

Pourquoi ?

- Trouver u_n en fonction de n, en passant par une suite arithmétique ou géométrique. (En général.)
- Ou trouver la limite de (u_n) en passant par celle de (v_n) ...

Méthode





Limite d'une suite (u_n) quand $n \to +\infty$

Suites monotones

- **Si** $(u_n) \nearrow$ et majorée **alors** (u_n) converge
- **Si** $(u_n) \searrow$ et minorée **alors** (u_n) converge.
- Limite non connue avec ce théorème. ⚠

Limites usuelles

- $k \to k$
- $\sqrt{n}, n, n^2, n^3, \dots \to +\infty$
- $\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}, \frac{1}{n^3}, \dots \to 0$
- $q^n \to 0$ si $-1 < q < 1$
- $q > 1$: $q^n \to +\infty$
- $n e^{-n} \to 0$
- $\frac{e^n}{n} \to +\infty$
- $\frac{\ln n}{n} \to 0$

Comparaison

- **Si** $\alpha_n \leq u_n \leq \beta_n$ et $\alpha_n \to L$, $\beta_n \to L$ **alors** $u_n \to L$
- **Si** $|u_n - L| \leq \alpha_n$ et $\alpha_n \to 0$ **alors** $u_n \to L$
- **Si** $\alpha_n \leq u_n$ et $\alpha_n \to +\infty$ **alors** $u_n \to +\infty$
- Si $u_n \leq \beta_n$ et $\beta_n \to -\infty$ **alors** $u_n \to -\infty$

Composition

Si $u_n \to \ell$ (réel ou ∞)
Si $f(x) \to a$ quand $x \to \ell$
Alors $f(u_n) \to a$

Opérations

- $+, \times, \div, -$: OK
  - $+\infty + \ell = +\infty$
  - Règles des signes $(+\infty) \times (+\infty) = +\infty \dots$
- F.I. ⚠
  - $(+\infty) + (-\infty)$
  - $(+\infty) - (+\infty)$
  - $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, $0 \times \infty$
  - TRANSFORMER ! factoriser par le terme de + haut degré, …

Agnès Rigny www.mathssansstress.fr

Limites et seuils

Seuils

- Si $q > 1$ et $M > 0$:

$q^n > M \iff n \ln(q) > \ln(M)$

$\iff n > \dfrac{\ln(M)}{\ln(q)}$.

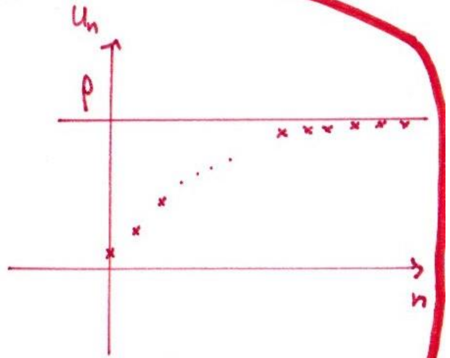
(Pour les entiers $n > \dfrac{\ln M}{\ln q}$, $u_n > M$)

- Si $0 < q < 1$ et $\varepsilon > 0$

$q^n < \varepsilon \iff n \ln(q) < \ln(\varepsilon)$

$\iff n > \dfrac{\ln(\varepsilon)}{\ln(q)}$ (car $\ln(q) < 0$)

Quoi ?

- 

$u_n \longrightarrow \ell$.

- $u_n \longrightarrow +\infty$:

u_n devient de plus en plus grand, plus grand que n'importe quel nombre > 0

- $u_n \longrightarrow -\infty$:

u_n est plus petit que n'importe quel nombre < 0

- $\ln \longrightarrow +\infty$

$n^2 \longrightarrow +\infty$

$-3n \longrightarrow -\infty$

$\dfrac{1}{n} \longrightarrow 0$

Opérations

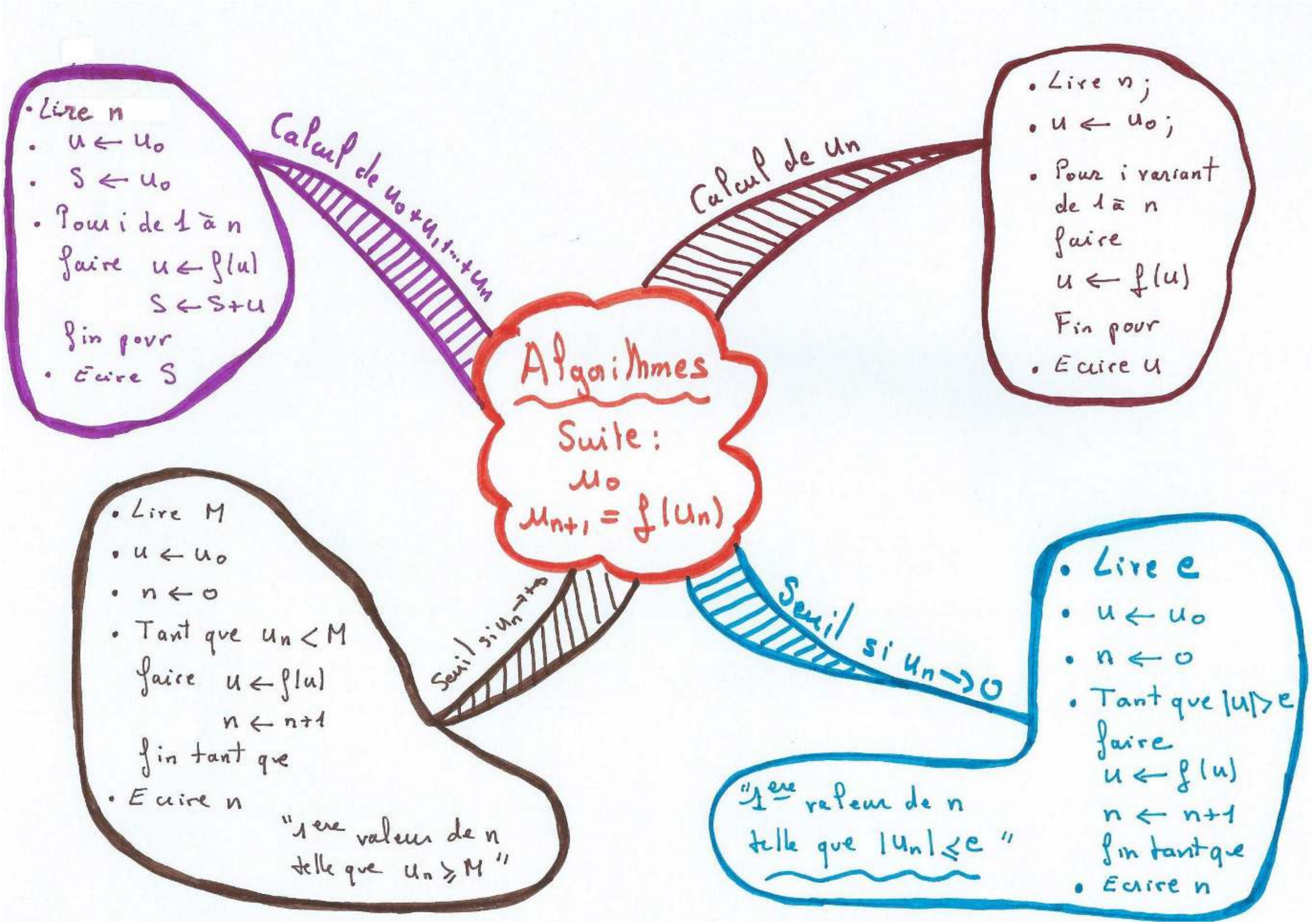
- Si $u_n \longrightarrow \ell$ et $v_n \longrightarrow \ell'$

$u_n + v_n \longrightarrow \ell + \ell'$

- Si $u_n \longrightarrow +\infty$ et $k > 0$, $k u_n \longrightarrow +\infty$
- Si $u_n \longrightarrow -\infty$ et $k > 0$, $k u_n \longrightarrow -\infty$
- Si $u_n \longrightarrow 0$, $a u_n + b \longrightarrow b$

(q^n)

- Si $-1 < q < 1$, $q^n \longrightarrow 0$
- Si $q > 1$, $q^n \longrightarrow +\infty$
- Si $q = 1$, $q^n = 1$: $q^n \longrightarrow 1$


Algorithmes
Suite :
u0
un+1 = f(un)
Calcul de u0+u1+...+un
• Lire n
• u ← u0
• S ← u0
• Pour i de 1 à n
faire u ← f(u)
S ← S+u
fin pour
• Ecrire S
Calcul de un
• Lire n ;
• u ← u0 ;
• Pour i variant
de 1 à n
faire
u ← f(u)
Fin pour
• Ecrire u
Seuil si un→+∞
• Lire M
• u ← u0
• n ← 0
• Tant que un < M
faire u ← f(u)
n ← n+1
fin tant que
• Ecrire n
"1ere valeur de n
telle que un ≥ M"
Seuil si un→0
• Lire e
• u ← u0
• n ← 0
• Tant que |u|>e
faire
u ← f(u)
n ← n+1
fin tant que
• Ecrire n
"1ere valeur de n
telle que |un| ≤ e"

Agnès Rigny www.mathssansstress.fr

Suites $u_{n+1} = f(u_n)$

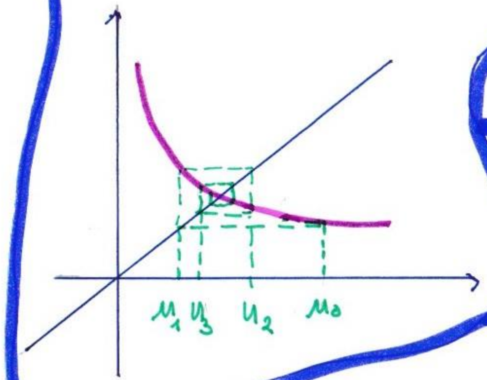
f décroissante

On a $f \circ f \nearrow$ $\quad u_{n+2} = f(u_{n+1}) = f \circ f(u_n)$

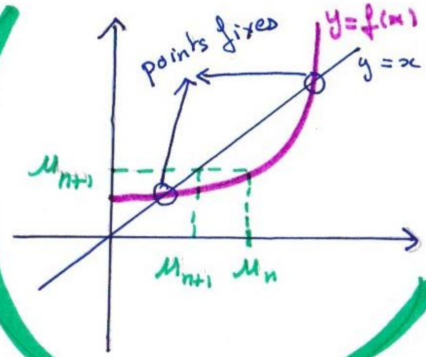
On a (u_{2n}) et (u_{2n+1}) monotones

Si $(u_{2n}) \nearrow$, $(u_{2n+1}) \searrow$

Si $(u_{2n}) \searrow$, $(u_{2n+1}) \nearrow$



Représentation graphique



Limite et point fixe

- Si f est continue sur I
- si $\forall n$, $u_n \in I$
- si (u_n) converge

Alors la limite de (u_n) notée L, vérifie $f(L) = L$.

→ L est un point fixe de f

→ Sert à obtenir des valeurs approchées de L.

Récurrence

On fait le plus souvent des démonstrations par récurrence !!!

f croissante

- Si $f \nearrow$ sur I et si $\forall n$, $u_n \in I$:
  Alors (u_n) est monotone ($\nearrow$ si $u_0 < u_1$, $\searrow$ si $u_0 > u_1$)
- Si $f(x) - x \geqslant 0$ sur I et $\forall n$, $u_n \in I$:
  Alors $(u_n) \nearrow$ $\quad (u_{n+1} = f(u_n) \geqslant u_n)$
- Si $f(x) - x \leqslant 0$ sur I et $\forall n$, $u_n \in I$:
  Alors $(u_n) \searrow$

Les fonctions – TVI – limites – dérivation

- Dérivées
- Théorème des valeurs intermédiaires
- Convexité
- Limites et asymptotes

Dérivées f'

Variations

- $f' \geq 0 \Rightarrow f \nearrow$ → Tableau de variation
  $f' \leq 0 \Rightarrow f \searrow$
- C'est le signe de $f'(x)$ qui nous intéresse
→ Dans le calcul : factoriser !

Définition

- $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

→ Sert à lever des formes indéterminées :

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$ ...

- Tangente :
  $y = f'(a)(x-a) + f(a)$
  → Détermination graphique ou géométrique de $f'(a)$
- Dérivée seconde : $f'' = (f')'$
  → signe de f'
  → convexité

Fonction composée

- $(f \circ u)(x) = f(u(x))$
- $(f \circ u)' = u' f' \circ u$

Exemples :

- $\left(e^{ax+b}\right)' = a\,e^{ax+b}$. $(e^{u})' = u'e^{u}$
- $(\cos(ax+b))' = -a \sin(ax+b)$
- $\left(\dfrac{1}{x^2+1}\right)' = \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}$

Dérivées usuelles

- $(x^n)' = n x^{n-1}$, $n \in \mathbb{Z}$
  $(x^2)' = 2x$ $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -\dfrac{1}{x^2}$ ...
- $(e^x)' = e^x$
- $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
- $(\cos x)' = -\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$
- $(\sin x)' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$
- $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

Opérations

$(f+g)' = f' + g'$

$(fg)' = f'g + g'f$

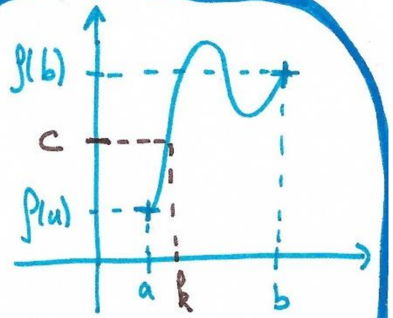
$(kf)' = kf'$

$\left(\dfrac{1}{f}\right)' = -\dfrac{f'}{f^2}$

$\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \left(f \times \dfrac{1}{g}\right)'$

Théorème des Valeurs Intermédiaires

Quoi ?



- c est une valeur intermédiaire entre $f(a)$ et $f(b)$
- f est continue (dérivable ou)

Alors il existe k entre a et b tel que $f(k)=c$

Corollaire ⚠

Si f est en plus strictement monotone, alors k est unique

Rédaction

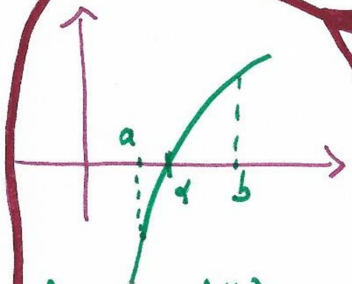
Avec un tableau de variation.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	<0	α ↗	>0

- f est continue sur $]-\infty, +\infty[$
- $0 \in \left]\lim_{-\infty} f, \lim_{+\infty} f\right[$
- f est strictement croissante.

Donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique α tel que $f(\alpha)=0$.

Encadrement



$f(a) < 0 < f(b)$

$f \nearrow$ strict

$\exists!\ \alpha$ tel que $f(\alpha)=0$.

$a<\alpha<b$.

Faire une table de valeurs pour encadrer α.

Pour qui !

Pour répondre aux questions sur
- le nombre de solutions d'une équation du type $f(x)=c$
- Montrer qu'il existe α tel que $f(\alpha)=c$
- Montrer qu'il existe un unique α tel que ...

Convexité

Point d'inflexion

x		a	
f''	$+$	0	$-$

ou

x		a	
f''	$-$	0	$+$

point d'inflexion

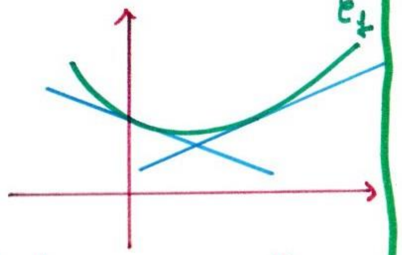
$A(a, f(a))$ est un point d'inflexion ssi $f''(a)=0$ et f'' change de signe en a

Ln et exp

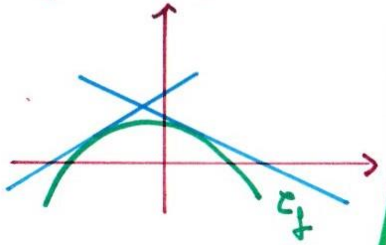
- Ln est concave sur $]0,+\infty[$
- exp est convexe sur $\mathbb{R}$

C'est quoi ?

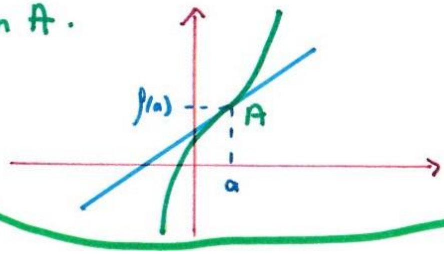
- f est convexe sur I : $\mathcal{C}_f$ est au dessus de chaque tangente



- f est concave sur I : $\mathcal{C}_f$ est au dessous de chaque tangente



- $A(a, f(a))$ est un point d'inflexion : La courbe traverse la tangente en A.



Dérivées f', f''

- f convexe sur I
  - ssi f' est croissante sur I
  - ssi $f'' \geq 0$ sur I
- f concave sur I
  - ssi f' est décroissante sur I
  - ssi $f'' \leq 0$ sur I

Agnès Rigny www.mathssansstress.fr

Limite pour les fonctions

Inégalités

- Si $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ pour $x \in I$ intervalle
- si $f(x) \to \ell$ quand $x \to a$ et $h(x) \to \ell$ quand $x \to a$

Alors $g(x) \to \ell$ quand $x \to a$

- Si $f(x) \leq g(x)$ pour $x \in I$
- Si $f(x) \to +\infty$ quand $x \to a$

alors $g(x) \to +\infty$

...

Opérations

Comme pour les suites

$+; \times; \div$, FI, ...

Quoi ?

Définitions

- $f(x) \to \ell$ quand $x \to \mp\infty$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists M \gtrless 0$, si $x > M$ alors $|f(x) - \ell| < \varepsilon$

- $f(x) \to \ell$ quand $x \to a$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \alpha > 0$, si $|x - a| < \alpha$ alors $|f(x) - \ell| < \varepsilon$

- $f(x) \to \mp\infty$ quand $x \to +\infty$

$\left.\begin{matrix}\forall M > 0\\ \forall M < 0\end{matrix}\right\}$, $\exists A > 0$, si $x > A$ alors $\left\{\begin{matrix}f(x) > M\\ f(x) < M\end{matrix}\right.$

- $f(x) \to \mp\infty$ quand $x \to -\infty$

$\left\{\begin{matrix}\forall M > 0,\\ \forall M < 0\end{matrix}\right.$ $\exists A < 0$, si $x < A$ alors $\left\{\begin{matrix}f(x) > M\\ f(x) < M\end{matrix}\right.$

- $f(x) \to \mp\infty$ quand $x \to a$

$\left\{\begin{matrix}\forall M > 0\\ \forall M < 0\end{matrix}\right.$, $\exists \alpha > 0$, si $|x - a| < \alpha$ alors $\left\{\begin{matrix}f(x) > M\\ f(x) < M\end{matrix}\right.$

Fonction composée

$$\lim_{x \to a} f(u(x)) = \ell$$

si $X = u(x) \to b$ quand $x \to a$

et $f(X) \to \ell$ quand $X \to b$

exemple

$$\lim_{x \to +\infty} e^{x^2+1} = +\infty$$

car, $X = x^2 + 1$:

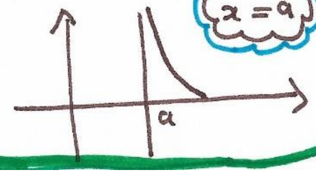
$$\lim_{x \to +\infty} X = +\infty$$

$$\lim_{X \to +\infty} e^X = +\infty$$

Asymptotes

- $y = \ell$ en $+\infty$

- $x = a$



Les fonctions usuelles

- Fonction exponentielle
- Fonction logarithme népérien
- Trigonométrie
- Fonctions trigonométriques
- Fonctions usuelles

Fonction exponentielle exp, e

exponentielle et logarithme

$y = e^x \iff \ln y = x$

Quoi ?

- La seule fonction solution de : $f' = f$, $f(0) = 1$
- Transforme une somme en produit
- Toujours strictement positive $e^x > 0$!
- Notée : e^x ou $\exp(x)$

Équations / Inéquations

$e^a = e^b \iff a = b$

$e^a > e^b \iff a > b$

ex : $e^{x^2 - 4} = 1 \iff x^2 - 4 = 0.$

Formules

$e^{a+b} = e^a \times e^b$ → la base

$e^{-x} = \frac{1}{e^x}$

$e^{nx} = (e^x)^n \quad n \in \mathbb{Z}$

$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$

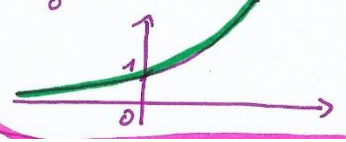
- $e^{\frac{1}{2}x} = \sqrt{e^x}$
- $e^{\frac{x}{n}} = (e^x)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{e^x}$

Fonction

$(e^x)' = e^x$

$(e^u)' = u'e^u$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
e^x	0 ↗	1	↗ $+\infty$



$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ $\quad \lim_{x \to -\infty} x e^x = 0$

Fonction $\ln$

Logarithme Népérien

Inéquations Equations

- **Equations**

$$\begin{cases} e^{x} = a \iff x = \ln a & a>0 \\ \ln x = a \iff x = e^{a} & \\ \ln(a) = \ln(b) \iff a = b & a,b>0 \end{cases}$$

- **Inéquations**

$e^{x} \geq a \iff x \geq \ln(a)$ $(a>0)$

$\ln x \geq a \iff x \geq e^{a}$

$e^{n} \geq a \iff n \geq \ln(a)$

(seuils)

Formules

$a, b > 0$!

$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$

$\ln(1) = 0$

$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$

$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$

$\ln(a^{n}) = n\ln(a)$ $\quad n \in \mathbb{Z}$

Avec e^{x}

$$\begin{cases} e^{\ln(x)} = x & x>0 \\ \ln(e^{y}) = y & y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

- $a = e^{b} \iff \ln a = b$

$a>0$, $b \in \mathbb{R}$

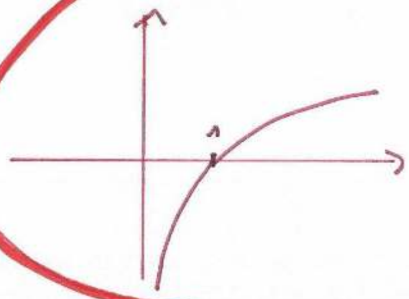
- $\ln(1) = 0$, $\ln(e) = 1$

Fonction

$\ln'(x) = \frac{1}{x}$

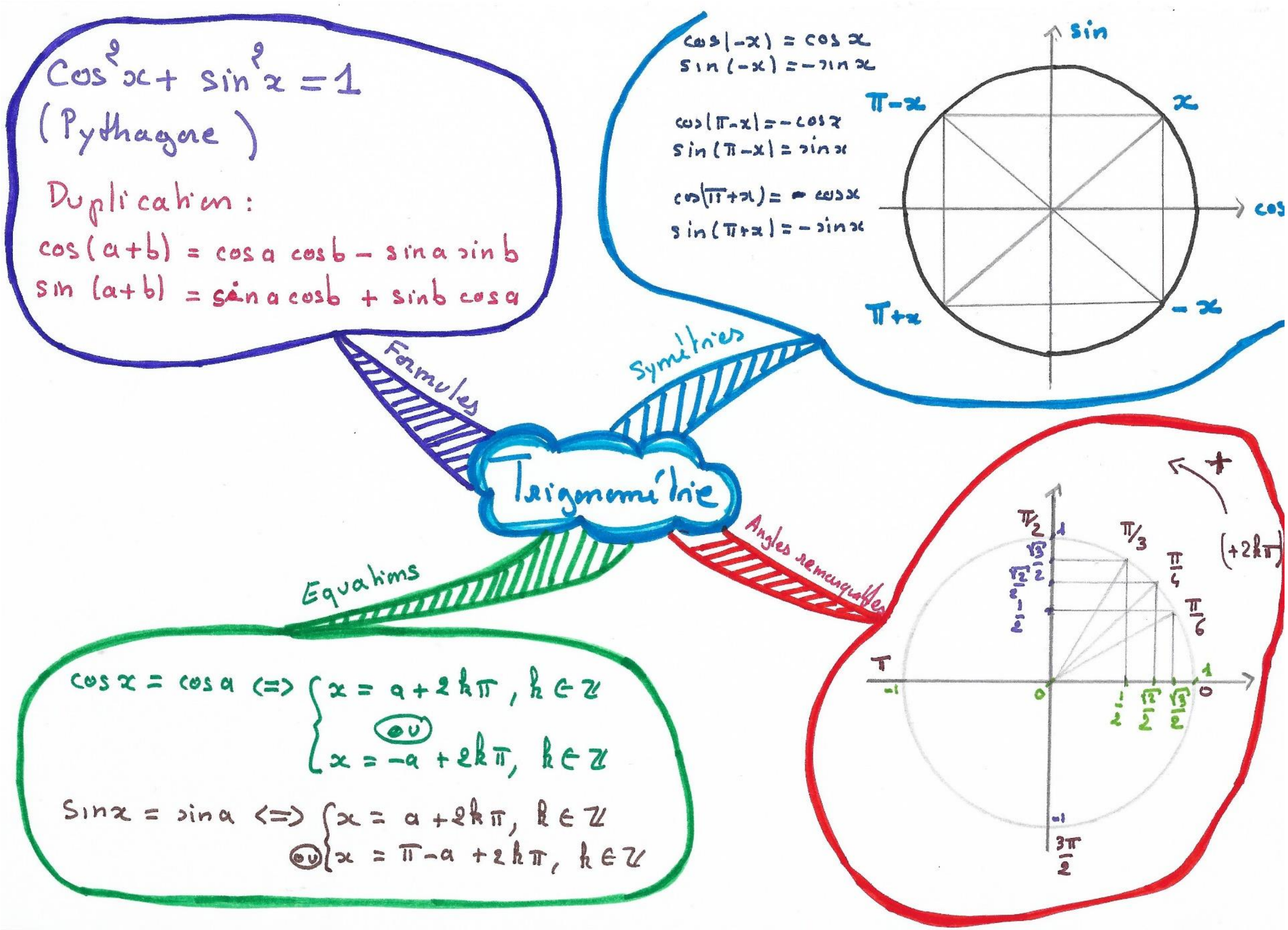
$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

x	0		1		$+\infty$
$\ln$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

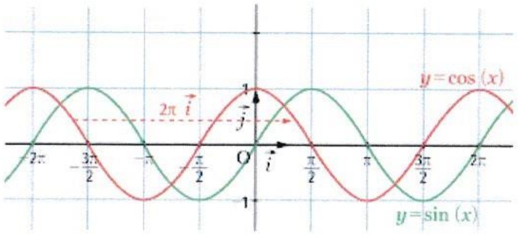


$\lim\limits_{x \to 0^{+}} x\ln(x) = 0$

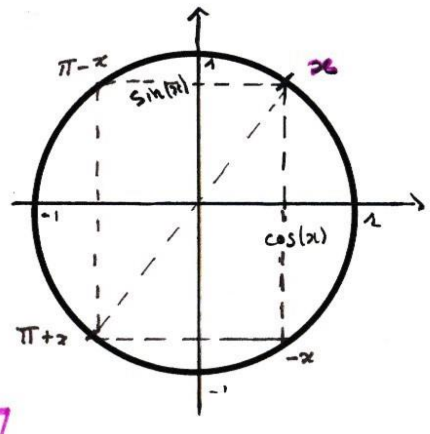
$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$


Trigonométrie
Formules
cos²x + sin²x = 1
(Pythagore)
Duplication :
cos(a+b) = cos a cos b − sin a sin b
sin(a+b) = sin a cos b + sin b cos a
Symétries
cos(−x) = cos x
sin(−x) = −sin x
cos(π−x) = −cos x
sin(π−x) = sin x
cos(π+x) = −cos x
sin(π+x) = −sin x
sin
cos
x
π−x
π+x
−x
Angles remarquables
+
(+2kπ)
π/2
π/3
π/4
π/6
√3/2
√2/2
1/2
1
−1
0
π
3π/2
Equations
cos x = cos a ⟺ x = a + 2kπ, k ∈ ℤ ou x = −a + 2kπ, k ∈ ℤ
sin x = sin a ⟺ x = a + 2kπ, k ∈ ℤ ou x = π − a + 2kπ, k ∈ ℤ

Fonctions trigonométriques



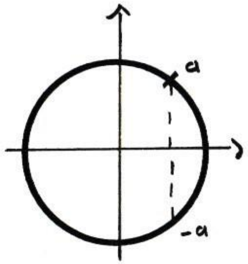
$$\begin{cases} -1 \leq \cos x \leq 1 \\ -1 \leq \sin x \leq 1 \end{cases}$$



Cosinus

- paire : $\cos(-x) = \cos x$ / 2π-périodique : $\cos(x+2\pi) = \cos x$
- $\cos(x+\pi) = -\cos x$ / $\cos(\pi - x) = -\cos x$

x	0	$\pi/2$	π
cos	1 ↘	0	↘ -1



$\cos x = \cos a$

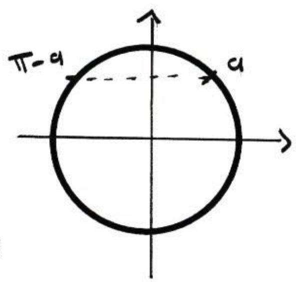
$\iff$

$$\begin{cases} x = a + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = -a + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Sinus

- impaire : $\sin(-x) = \sin x$ / 2π-périodique : $\sin(x+2\pi) = \sin x$
- $\sin(x+\pi) = -\sin x$ / $\sin(\pi - x) = \sin x$

x	$-\pi/2$	0	$\pi/2$
sin	-1 ↗	0	↗ 1

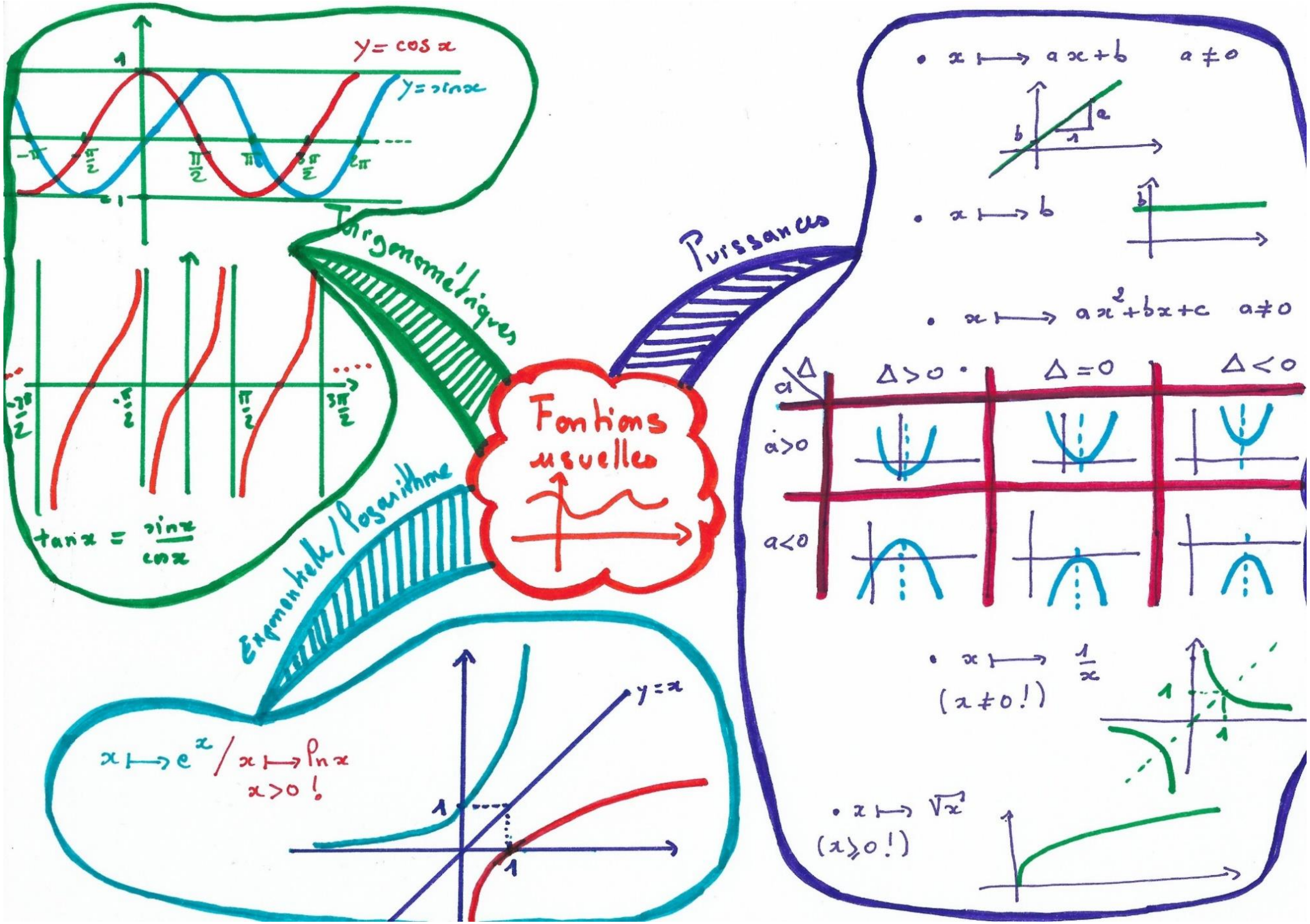


$\sin x = \sin a$

$\iff$

$$\begin{cases} x = a + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = \pi - a + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Agnès Rigny www.mathssansstress.fr



Equations différentielles- Primitives – intégrales

- Equations différentielles
- Intégrales
- Intégrales et primitives
- Intégrales ≠primitives

Agnès Rigny www.mathssansstress.fr

Equations différentielles

Quoi ?

- Equation (=) dont l'inconnue y est une fonction dérivable
- $y' = ay + f$:
  - $a = 0$: $y' = f$
  - $a \neq 0$: $f(x) = b$, $y' = ay + b$
  - $a \neq 0$: $y' = ay + f$
- Une solution particulière est une solution

$y' = f$

Donnée : une fonction f continue

Inconnue : une fonction y

Equation : $y' = f$

On dit que y est une primitive de f.

Théorèmes

- f (continue) admet une infinité de primitives
- Il y a une seule primitive y telle que $y(x_0) = y_0$, x_0 et y_0 donnés
- 2 primitives diffèrent d'une constante

$y' = ay$

- Solutions : $y(x) = Ce^{ax}$, C réel
- Unique solution telle que $y(x_0) = y_0$
- Si y_1 et y_2 sont des solutions, $y_1 + y_2$ aussi, ky_1 aussi (k réel)
- On dit que c'est une équation homogène

$y' = ay + b$

- Solution particulière : $y(x) = -\frac{b}{a}$ (fonction constante)
- Toutes les solutions : $y(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}$, $C \in \mathbb{R}$

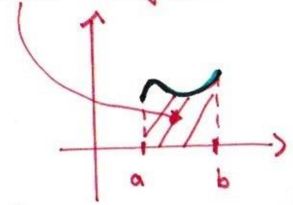
$y' = ay + f$

Si on connait φ une solution particulière $\longrightarrow$ $y(x) = Ce^{ax} + \varphi(x)$, $C \in \mathbb{R}$

$$\int_a^b f(t)\,dt$$

Quoi ?

- Aire si $f \geq 0$ et $a \leq b$



- $\int_a^b f(t)\,dt = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

où $F' = f$

(dans tous les cas)

Liens

Fonctions
Primitives, dérivées
Géométrie

Inégalités

- Si $f \geq 0$ et $a \leq b$: $\int_a^b f(t)\,dt \geq 0$
- Si $f \geq g$ et $a \leq b$: $\int_a^b f(t)\,dt \geq \int_a^b g(t)\,dt$

→ Sert à démontrer des inégalités sur des $\int$.

Primitives

$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$:

F est LA primitive de f qui s'annule en a.

Opérations

- $\int_a^b k\,f(t)\,dt = k\int_a^b f(t)\,dt$
- $\int_a^b (f(t)+g(t))\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt$

Chasles

$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt$

→ $\int_a^b f(t)\,dt = -\int_b^a f(t)\,dt$

Valeur moyenne de f sur [a, b]

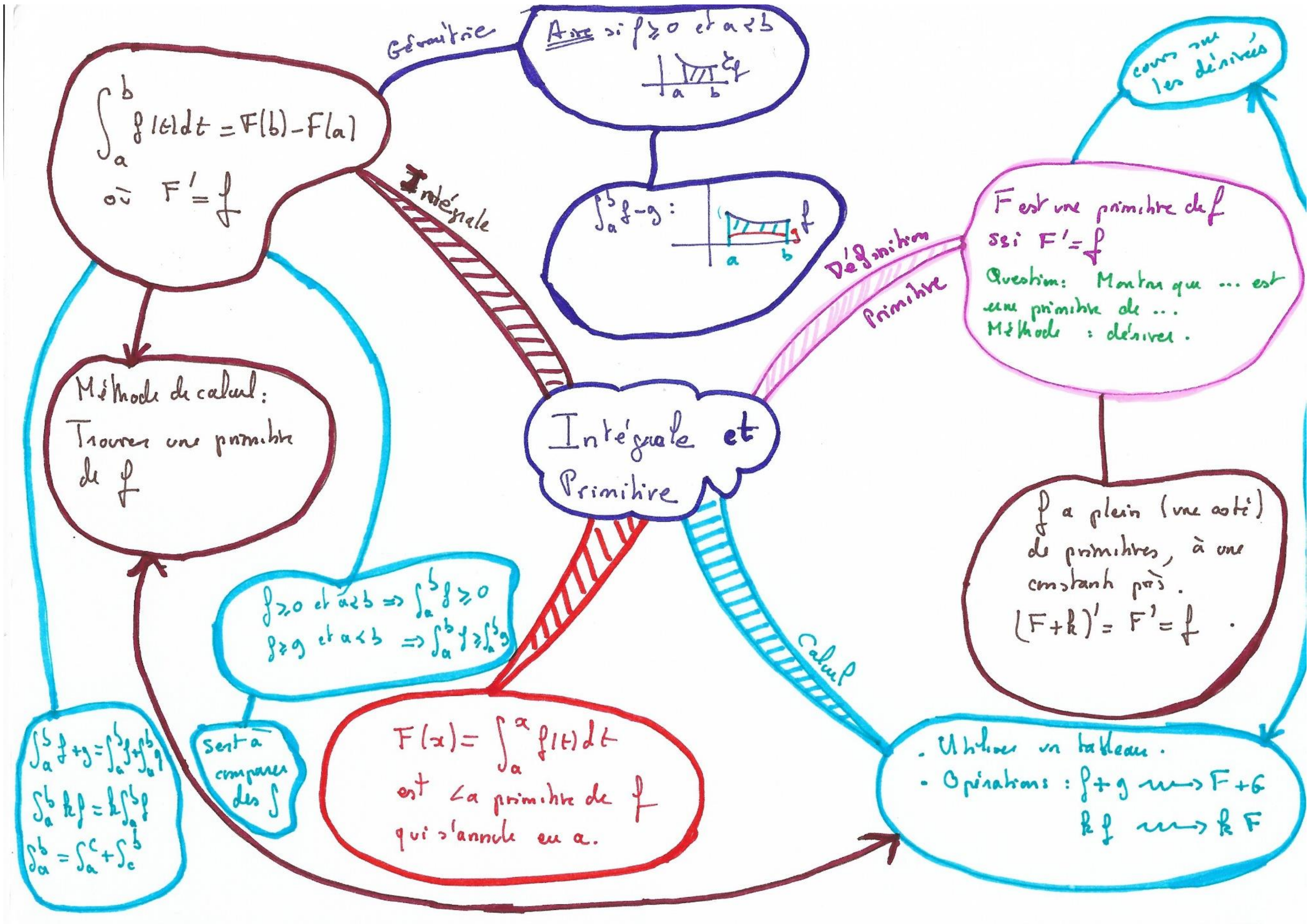
$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$

IPP

$\int_a^b f'(t)g(t)\,dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)\,dt$

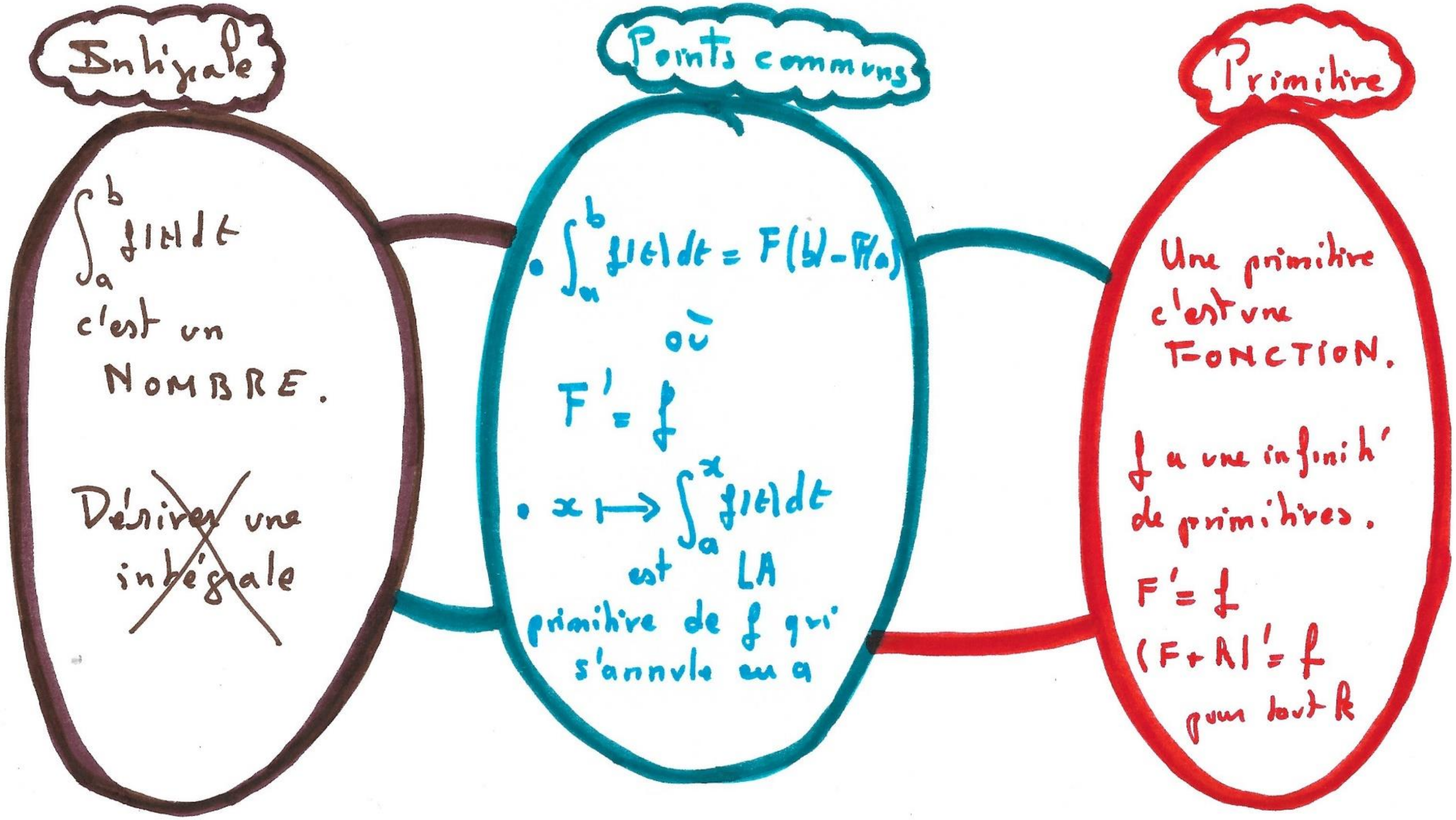
→ Sert quand on veut calculer l'intégrale d'un produit

→ Déterminer (reconnaître) qui est f', qui est g


Intégrale et Primitive
$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$ où $F' = f$
Intégrale
Géométrie
Aire si $f \geq 0$ et $a < b$
a b
f
$\int_a^b f - g$:
a b
f g
Méthode de calcul : Trouver une primitive de f
$f \geq 0$ et $a < b \Rightarrow \int_a^b f \geq 0$
$f \geq g$ et $a < b \Rightarrow \int_a^b f \geq \int_a^b g$
Sert à comparer des $\int$
$\int_a^b f + g = \int_a^b f + \int_a^b g$
$\int_a^b kf = k\int_a^b f$
$\int_a^b = \int_a^c + \int_c^b$
$F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est la primitive de f qui s'annule en a.
Définition Primitive
F est une primitive de f ssi $F' = f$
Question : Montrer que ... est une primitive de ...
Méthode : dériver.
cours sur les dérivées
f a plein (une infinité) de primitives, à une constante près.
$(F + k)' = F' = f$.
Calcul
. Utiliser un tableau.
. Opérations : $f + g \rightsquigarrow F + G$
$kf \rightsquigarrow kF$

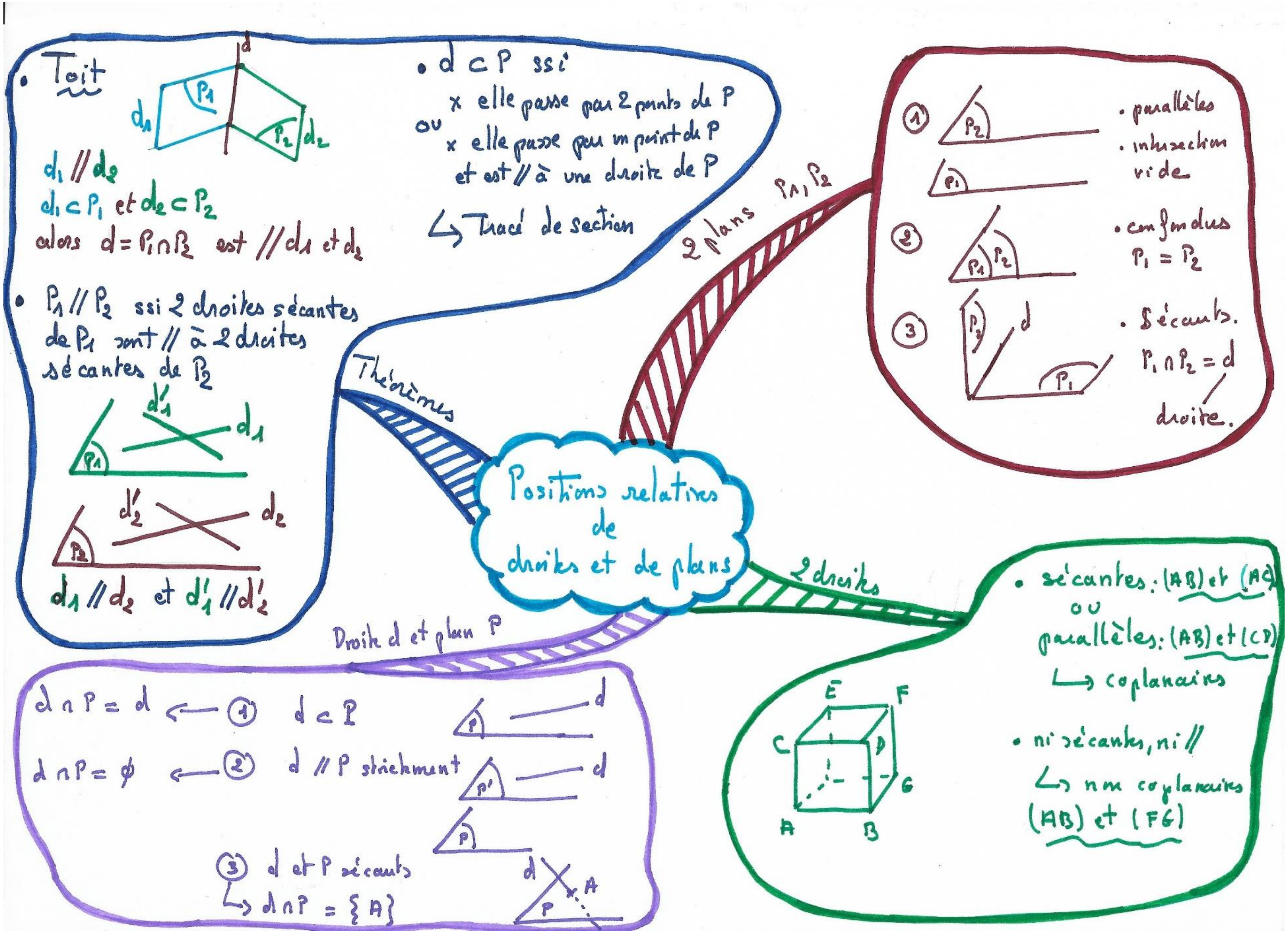
Agnès Rigny www.mathssansstress.fr

Intégrale ≠ Primitive



La géométrie dans l'espace

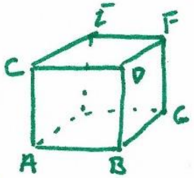
- Positions relatives de droites et de plans
- Produit scalaire et orthogonalité
- Vecteurs et équations de droites et de plans


Positions relatives de droites et de plans
Théorèmes
• Toit
d₁ // d₂
d₁ ⊂ P₁ et d₂ ⊂ P₂
alors d = P₁ ∩ P₂ est // d₁ et d₂
• d ⊂ P ssi
x elle passe par 2 points de P
ou
x elle passe par un point de P et est // à une droite de P
↳ Tracé de section
• P₁ // P₂ ssi 2 droites sécantes de P₁ sont // à 2 droites sécantes de P₂
d₁ // d₂ et d'₁ // d'₂
2 plans P₁, P₂
① parallèles
intersection vide
② confondus
P₁ = P₂
③ Sécants.
P₁ ∩ P₂ = d
droite.
2 droites
• sécantes : (AB) et (AC)
ou
parallèles : (AB) et (CD)
↳ coplanaires
• ni sécantes, ni //
↳ non coplanaires
(AB) et (FG)
Droite d et plan P
d ∩ P = d ← ① d ⊂ P
d ∩ P = ∅ ← ② d // P strictement
③ d et P sécants
↳ d ∩ P = {A}

Produit scalaire et orthogonalité $\perp$

Droites orthogonales / Droites perpendiculaires

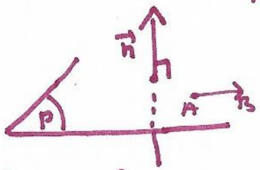
- orthogonales = vecteurs directeurs orthogonaux : (AB) et (FC)
- perpendiculaires = orthogonales et sécantes : (AB) et (AC)



Vecteur normal

$d = [A, \vec{u}]$
$d \perp P$
$\Longleftrightarrow$ $\vec{u}$ normal à P

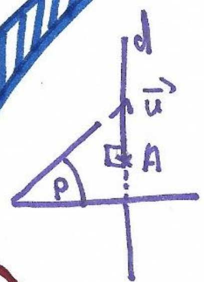
- P_1 et P_2 sont orthogonaux ssi $\vec{n_1} \cdot \vec{n_2} = 0$ avec $\vec{n_1}$ normal à P_1, $\vec{n_2}$ normal à P_2
-



$\vec{n}$ est normal à P ssi $\vec{n} \cdot \vec{AB} = 0$ pour tous A, B de P.

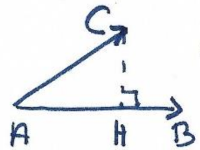
- $P = \{ M$ tel que $\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0 \} \longrightarrow$ équation cartésienne
- $P : ax + by + cz + d = 0 \quad \vec{n} = (a, b, c)$

C'est quoi ?

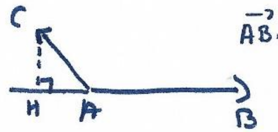


- $\vec{u}$ et $\vec{v}$, représentés par $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$.
On se retrouve dans le plan ABC (ou sur une droite, donc dans un plan).
On a alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{AB} \cdot \vec{AC}$ (définition du produit scalaire dans le plan).
$\vec{u} \perp \vec{v} \Longleftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

-



$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AH$



$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -AB \times AH$

- Dans un repère orthonormé :
$\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$

Mêmes propriétés que dans le plan
$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
etc.

Agnès Rigny www.mathssansstress.fr

Vecteurs et équations de droites et de plans

Equation cartésienne

En repère orthonormé !

- $P : ax+by+cz+d=0$
  $\vec{n} = (a,b,c)$ vecteur normal à P
  $P' : a'x+b'y+c'z+d'=0$
  $P=P' \iff (a,b,c,d)$ proportionnel à (a',b',c',d')
  $P // P' \iff (a,b,c)$ proportionnel à (a',b',c')
- $d = P \cap P'$ avec $P \not\parallel P'$
  $\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$
  avec (a,b,c) et (a',b',c') non proportionnels.

Droites, plans, vecteurs

- P = 3 points non alignés (ABC)
  ou
  1 point et 2 vecteurs non colinéaires $[A, \vec{u}, \vec{v}]$
- d = 2 points $\neq$ (AB)
  ou
  1 point et 1 vecteur $\neq \vec{0}$
  $[A, \vec{u}]$
- $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ coplanaires ssi il existe α, β, γ réels dont un $\neq 0$
  t.q. $\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}+\gamma\vec{w}=\vec{0}$
- Repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ avec $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ non coplanaires
  $\vec{u} = x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$
  $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix} \iff \vec{OA} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$
  $\vec{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$
  $\vec{u}, \vec{v}$ colinéaires $\iff \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix}$ proportionnels.
  I = milieu de $[A,B]$: $x_I = \frac{1}{2}(x_A + x_B)$ etc.

Représentation paramétrique

- $d = [A, \vec{u}]$
  $M \in d \iff \vec{AM} = t\vec{u}, t \in \mathbb{R}$
  $\iff \begin{cases} x = x_A + t x_u \\ y = y_A + t y_u \\ z = z_A + t z_u \end{cases}, t \in \mathbb{R}$
- $P = [A, \vec{u}, \vec{v}]$
  $M \in P \iff \vec{AM} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
  $\iff \begin{cases} x = x_A + \alpha x_u + \beta x_v \\ y = y_A + \alpha y_u + \beta y_v \\ z = z_A + \alpha z_u + \beta z_v \end{cases}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Repère orthonormé !

- $AB = \|\vec{AB}\| = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v$

Les probabilités

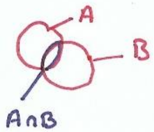
Dénombrer c'est déterminer le nombre d'éléments d'un ensemble

Combinatoire - Dénombrement

Les ensembles

- 

$A = \{a, b, c\}$ $\quad card(A) = 3$
- $card(A)$ = nombre d'éléments de A (cardinal)
- $\emptyset$ = ensemble vide . $card(\emptyset) = 0$
- $A \cap B$ = les éléments à la fois dans A et dans B



A "inter" B

- $A \cup B$ = les éléments de A avec les éléments de B. La réunion
- A et B sont disjoints ssi $A \cap B = \emptyset$.

(aucun élément en commun)

Alors $card(A \cup B) = card(A) + card(B)$.

- Produit cartésien : $A \times B = \{ \underbrace{(a,b)}_{\text{couple}}, a \in A, b \in B \}$

$card(A \times B) = card(A) \times card(B)$

- $A^n = \{(a_1, \dots a_n), a_i \in A\}$ n-uplet ou n-liste. L'ordre compte

$card(A^n) = (card(A))^n$.

Arrangements et permutations

$A = \{x_1, \dots x_n\}$. $card\, A = n$.

- Une permutation de A est un n-uplet contenant chaque élément de A une et une seule fois. Il y en a $n!$

$[\, 0! = 1 \; ; \; (n+1)! = (n+1) \times n! \; ; \; n! = n \times (n-1) \times \dots \times 2 \times 1 \,]$

- Un arrangement de k éléments de A est un k-uplet d'éléments de A distincts.

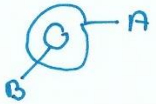
Il y en a : $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$

$A_n^n = n! \qquad A_n^0 = 1$

Combinaisons et parties

$A = \{x_1, \dots x_n\}$ $card(A) = n$

- $B \subset A$: B est une partie de A . $\emptyset \subset A$; $A \subset A$



Il y a 2^n parties de A.

- Une combinaison de k éléments de A est une partie de k éléments de A. Il y en a $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \qquad \binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$

Agnès Rigny www.mathssansstress.fr

Probabilités Généralités

Formules

- **Probabilité conditionnelle :**

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$ → On sait que B est réalisé

(A sachant B)

- **Probabilités totales**

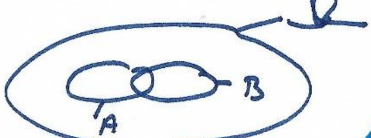
$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \dots$

avec $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup \dots$

et $A_1 \cap A_2 = \emptyset, \dots$

Univers

- Ω l'univers, est composé d'issues
- Les parties de Ω sont les évènements.
- $\emptyset$: partie vide = évènement IMPOSSIBLE.
- Ω : évènement CERTAIN
- $\{\omega\}$: évènement élémentaire (1 seule issue)



Probabilité

$P : A \rightarrow x \in [0,1]$

$P(\emptyset) = 0$

$P(\Omega) = 1$

0 : aucune chance de se produire

1 : certain

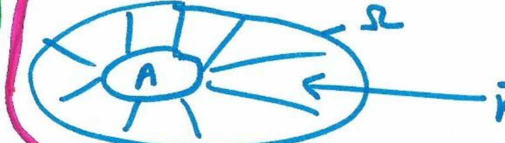
- $P(\{\omega_1\}) + \dots + P(\{\omega_n\}) = 1$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $A \cap B = \emptyset$: A et B incompatibles
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

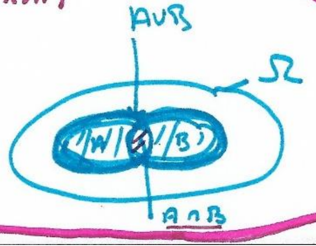
Opérations évènements

$A \cup B$ union (ou)

$A \cap B$ intersection (et)

$\overline{A}$ complémentaire (non)





MATHS SANS STRESS
Agnès Rigny www.mathssansstress.fr

Arbres et Probabilités

$$P(A\cap B) \neq P_A(B)$$

⚠ ⚠

Faire l'arbre

- Repérer le nom des évènements.
- Repérer les choix $(A, \bar{A})$ ou (A_1, A_2, A_3)
- Repérer les mots clés "parmi, sachant", et les probas conditionnelles.
- Construire l'arbre et utiliser les formules. (la somme des branches = 1)

On fabrique des cadenas avec 2 machines : A_1 et A_2
60 % de la production vient de A_1
Parmi les cadenas de la machine A_1, 20 % sont défectueux, parmi ceux de la machine A_2, 12 % sont défectueux.

- 0,6 — A_1
  - 0,2 — D
  - 0,8 — $\bar{D}$
- 0,4 — A_2
  - 0,12 — D
  - 0,88 — $\bar{D}$

$A, \bar{A}$

- p — A
  - q — $B \to P(A\cap B)$
  - $1-q$ — $\bar{B}$
- $1-p$ — $\bar{A}$
  - t — $B \to P(\bar{A}\cap B)$
  - $1-t$ — $\bar{B}$

- Principe de la somme :
$$P(B) = P(A\cap B) + P(\bar{A}\cap B)$$
- Principe du produit
$$P(A\cap B) = p(A)\, p_A(B)$$
$$P(A\cap B) = p \times q$$

généralisation

$(A_1, A_2, \ldots A_n)$ système complet

$$p(B) = \sum_{i=1}^{n} p(A_i \cap B)$$
$$p(B) = \sum_{i=1}^{n} p(A_i)\, p_{A_i}(B)$$

Proba de la cause

$$P_B(A) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$
$$P_B(A) = \frac{P(A)\, P_A(B)}{P(B)}$$

Variables aléatoires discrètes X

Quoi

- $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

  A chaque issue on associe un nombre.

- Résultat du lancer de dé
  Nombre de succès
  Somme d'argent gagné.
  ...

- $X(\Omega) = \{x_1, \cdots x_n\}$

  $P(X = x_i) = p_i$

  $p_1 + \cdots + p_n = 1$

X	x_1	....	x_n
p_i	p_1	...	p_n

Loi

- Moyenne = Espérance

  $E(X) = p_1 x_1 + \cdots + p_n x_n$.

Variance

$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

$V(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m)^2 p_i$

où $m = E(X)$

Formules

Si :
$x_1 < x_2 < \ldots < x_n$

- $P(X \leq x_k) = P(X = x_1) + \cdots + P(X = x_k)$

- $P(X > x_k) = 1 - P(X = x_k)$
  $= p(X = x_{k+1}) + \cdots + p(X = x_n)$

Lois usuelles

- **Loi binomiale** $\mathcal{B}(n, p)$

  Nombre de succès dans la répétition de n expériences de Bernoulli indépendantes et identiques.

  $E(X) = np$.

- **Loi de Bernoulli** $\mathcal{B}(p)$

  Succès $= 1$
  Echec $= 0$

  $P(X = 1) = p$. $E(X) = p$.

- **Loi uniforme** : Equiprobabilité

  $P(X = x_1) = P(X = x_2) = \cdots = P(X = x_n) = \frac{1}{n}$

  Exemple : Lancer d'un dé. Chaque nombre de 1 à 6 : proba $\frac{1}{6}$

Loi binomiale $X \hookrightarrow B(n,p)$

Formules $X \hookrightarrow B(n,p)$:

$X(\Omega) = \{0, 1, 2, \dots n\}$

$$P(X=k) = \underbrace{\binom{n}{k}}_{\text{nombre de chemins dans l'arbre avec } k \text{ succès}} \underbrace{p^k}_{\text{proba des } k \text{ "succès"}} \underbrace{(1-p)^{n-k}}_{\text{proba des } n-k \text{ "échecs"}}$$

$P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k-1)$

$P(X \leq k) = P(X=0) + \dots + P(X=k)$

Avec la calculatrice.

Ti : · Binomfdp$(n,p,k) = P(X=k)$

· Binomfrep$(n,p,k) = P(X \leq k)$.

$E(X) = np$

$V(X) = p(1-p)n$

Rédaction : Pour montrer que $X \hookrightarrow B(n,p)$:

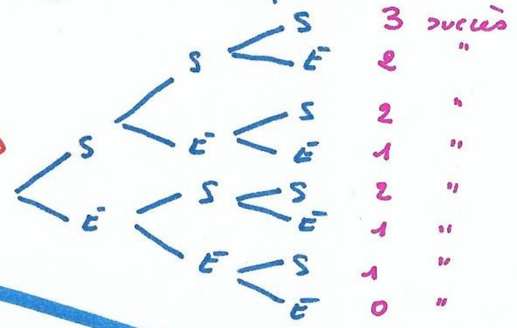
On a un schéma de Bernoulli, car on répète n fois ~~des~~ épreuves de Bernoulli, identiques et indépendantes, de proba de succès p

· Épreuve de Bernoulli :

(Pile ou Face)

· Schéma de Bernoulli :

Répétition de $\boxed{n}$ épreuves de Bernoulli, identiques et indépendantes.



$X \hookrightarrow B(n,p)$

X = nombre de succès.

Paramètres de la loi $\begin{cases} n : \text{nombre de répétitions} \\ p : \text{proba de succès} \end{cases}$

⚠ Un "succès" n'a pas de valeur affective !

Exemple : Nombre de "Pile" quand on lance 10 fois une pièce.

Agnès Rigny www.mathssansstress.fr

$X+Y$

$X_1+\dots+X_n$

aX

Echantillon

n variables indépendantes $X_1, \dots X_n$ de même loi, d'espérance m, de variance σ^2

$S_n = X_1 + \dots + X_n$ (somme)

$M_n = \dfrac{S_n}{n}$ (moyenne)

$E(S_n) = n\, m$

$E(M_n) = m$

$V(S_n) = n\sigma^2$

$V(M_n) = \dfrac{\sigma^2}{n}$

$Y = aX$

- Si X est une var $Y = aX$ aussi
- $E(aX) = a\,E(X)$
- $V(aX) = a^2 V(X)$

- Si X et Y sont des var $Z = X + Y$ aussi
- $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

Loi binomiale

- $X_1, \dots, X_n$ variables de Bernouilli identiques (paramètre p) et indépendantes

→ $X = X_1 + \dots + X_n$ suit une loi binomiale de paramètres n et p.

- $E(X) = E(X_1 + \dots X_n) = E(X_1) + \dots + E(X_n) = np$

$V(X) = V(X_1 + \dots + X_n) = V(X_1) + \dots + V(X_n) = np(1-p)$

Indépendance

- $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes ssi pour tous $x_1, \dots x_n$

on a $P(X_1 = x_1 \cap X_2 = x_2 \cap \dots \cap X_n = x_n) = P(X_1 = x_1) \times \dots \times P(X_n = x_n)$

- Si X et Y sont indépendantes

$V(X+Y) = V(X) + V(Y)$

Données : X une variable aléatoire, $m = E(X)$, $\sigma^2 = V(X)$. $a > 0$

Théorèmes

- Inégalité de Markov : Si $X \geq 0$, on a $P(X \geq a) \leq \frac{m}{a}$
- Inégalité de Bienaymé-Tchebychev : $P(|X - m| \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{a^2}$ ou $P(|X-m| < a) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{a^2}$
- Soit $X_1, \dots X_n$ indépendantes et de même loi que X. On pose $M_n = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$

On a
1/ Inégalité de concentration : $P(|M_n - m| \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{na^2}$.
2/ Loi faible des grands nombres : $\lim\limits_{n \to +\infty} P(|M_n - m| \geq a) = 0$.

Loi faible des grands nombres

97832596211963180603202195 2.....

Que dit la loi faible des grands nombres ?

→ Si on lance un "grand" nombre de fois une pièce bien équilibrée, la proportion de "Face" est proche de $\frac{1}{2}$

Exemple : On lance 100 fois une pièce bien équilibrée.
On pose $X_i = 1$ si le $i^{\text{ème}}$ lancer donne "Face". $E(X_i) = \frac{1}{2}$ $V(X_i) = \frac{1}{4}$

Soit $X = X_1 + \dots + X_{100}$ le nombre de "Face" obtenu, et $M = \frac{1}{100} X$.

Cherchons $P(40 < X < 60) = P(0,4 < M < 0,6) = P(|M - 0,5| < 0,1)$

$P(|M - 0,5| \geq 0,1) \leq \frac{1/4}{100 \times 0,1^2} = 0,25$.

Donc $P(|M - 0,5| < 0,1) \geq 0,75$.

$\underline{P(40 < X < 60) \geq 0,75}$

Majorer une probabilité !

Dans un immeuble, l'ascenseur reste en moyenne 2 minutes au rez de chaussée avant d'être rappelé.

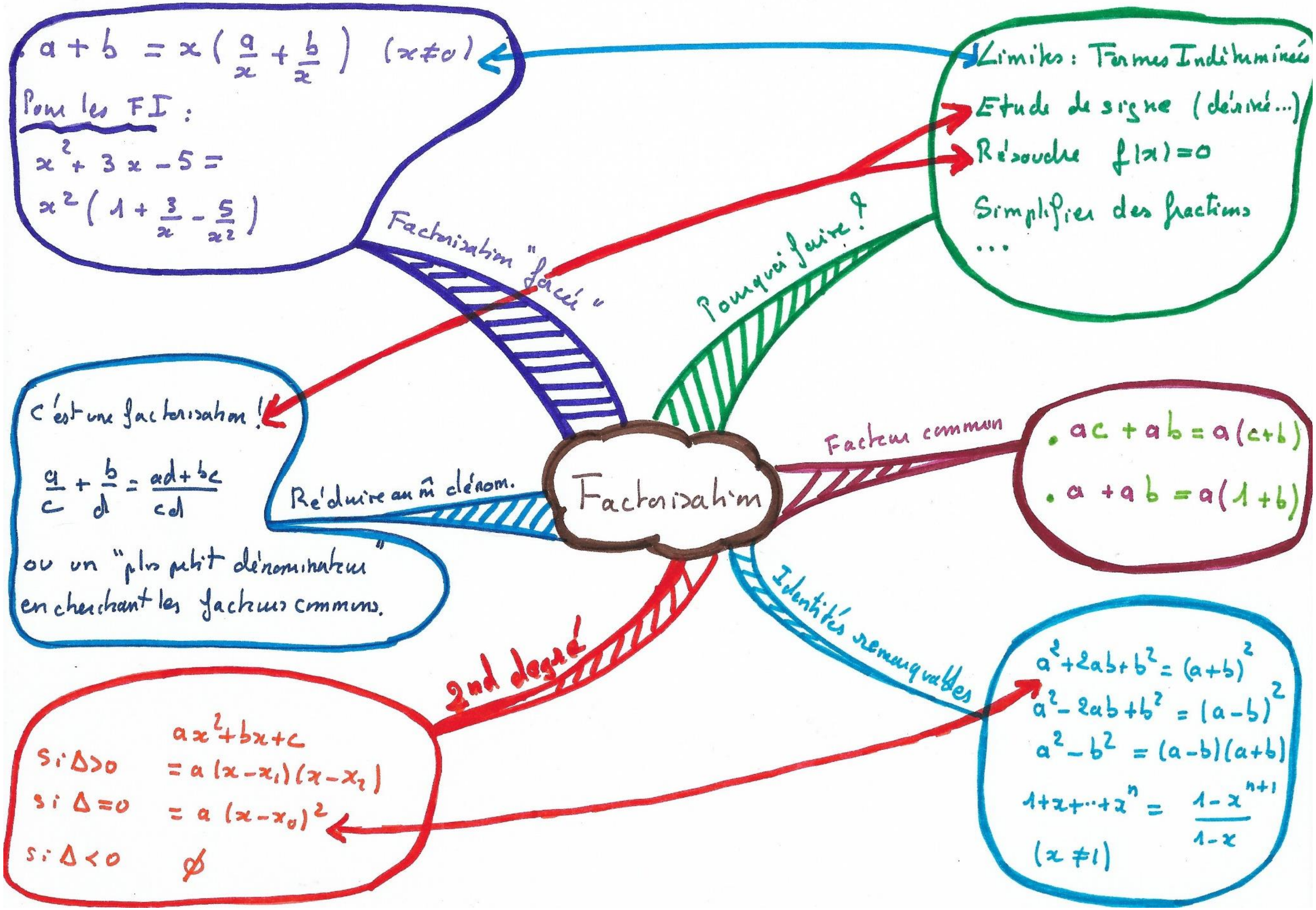
Majorer la probabilité qu'il reste plus de 5 minutes au rez de chaussée ?

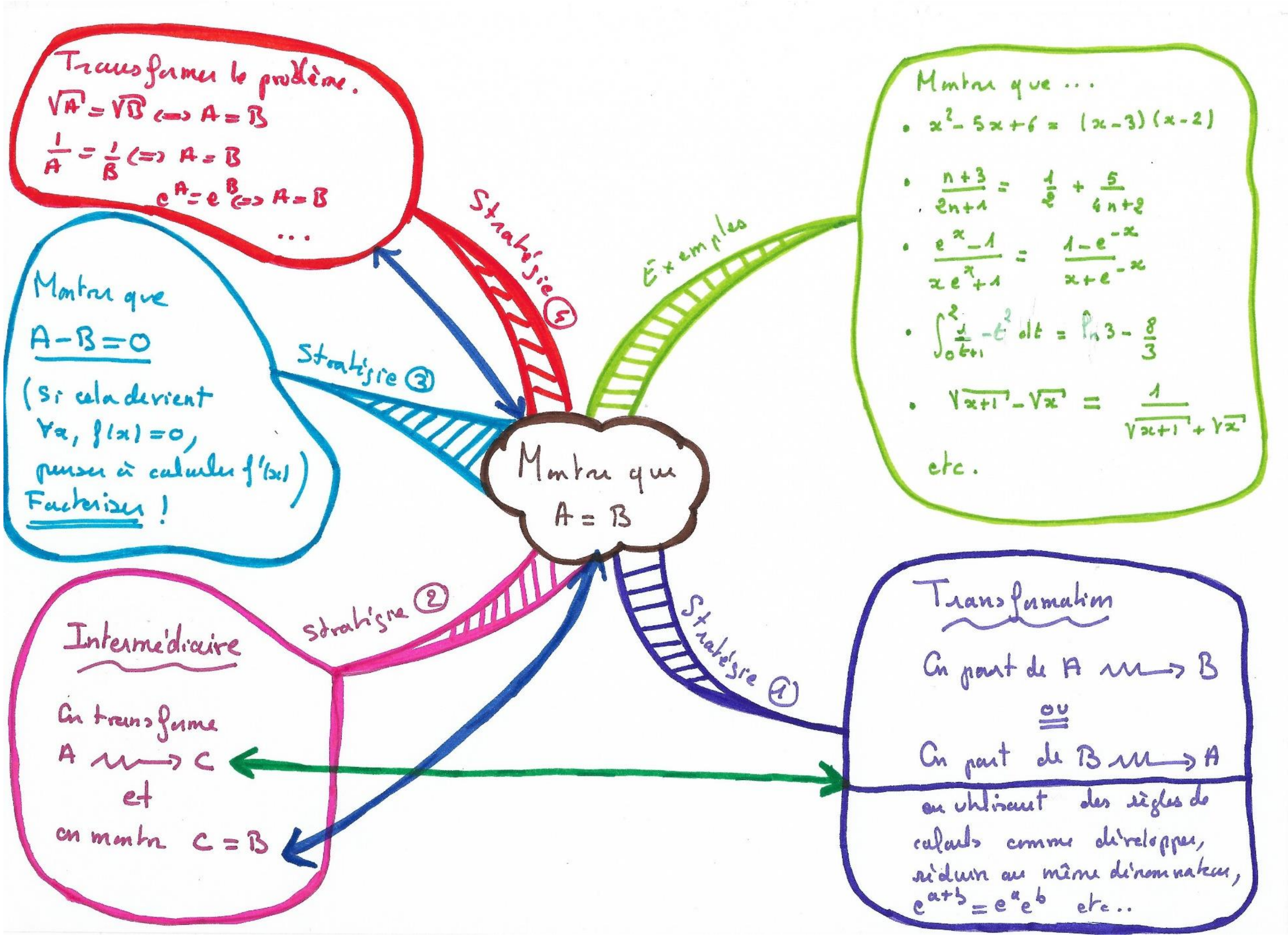
On pose X le temps passé au rez de chaussée.
$E(X) = 2$ (minutes).
On cherche $P(X \geq 5)$. On a bien $X \geq 0$.
D'après Markov : $P(X \geq 5) \leq \frac{2}{5} = 0,4$.
On a moins de 2 chances sur 5 pour qu'il reste plus de 5 minutes au rez de chaussée.

Outils et méthodes mathématiques

- Factorisation
- Montrer que A = B
- Montrer que A ≤B
- Second degré
- Equations de droites dans le plan
- Plan d'étude d'une fonction

Agnès Rigny www.mathssansstress.fr




Transformer le problème.
$\sqrt{A} = \sqrt{B} \iff A = B$
$\frac{1}{A} = \frac{1}{B} \iff A = B$
$e^A = e^B \iff A = B$
...
Stratégie 4
Montrer que
A − B = 0
(si cela devient $\forall x, f(x) = 0$, penser à calculer $f'(x)$)
Factoriser !
Stratégie 3
Montrer que A = B
Exemples
Montrer que ...
$x^2 - 5x + 6 = (x-3)(x-2)$
$\frac{n+3}{2n+1} = \frac{1}{2} + \frac{5}{4n+2}$
$\frac{e^x - 1}{xe^x + 1} = \frac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}}$
$\int_0^2 \frac{1}{t+1} - t^2 \, dt = \ln 3 - \frac{8}{3}$
$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$
etc.
Stratégie 2
Intermédiaire
On transforme
$A \rightsquigarrow C$
et
on montre $C = B$
Stratégie 1
Transformation
On part de $A \rightsquigarrow B$
ou
On part de $B \rightsquigarrow A$
en utilisant des règles de calculs comme développer, réduire au même dénominateur, $e^{a+b} = e^a e^b$ etc..

Montrer que $A \leq B$

Exemples
- Montrer que $u_n \leq u_{n+1}$ ou Mq (u_n) est ↗
- Montrer que $0 \leq u_n \leq 1$ ou Mq (u_n) bornée
- Montrer que $u_n \leq v_n$.
- Montrer que si $x \in [0,1]$ alors $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{4}$.
- …

Pas à pas
Partir d'une inégalité vraie et transformer avec les opérations pour obtenir ce qu'on veut

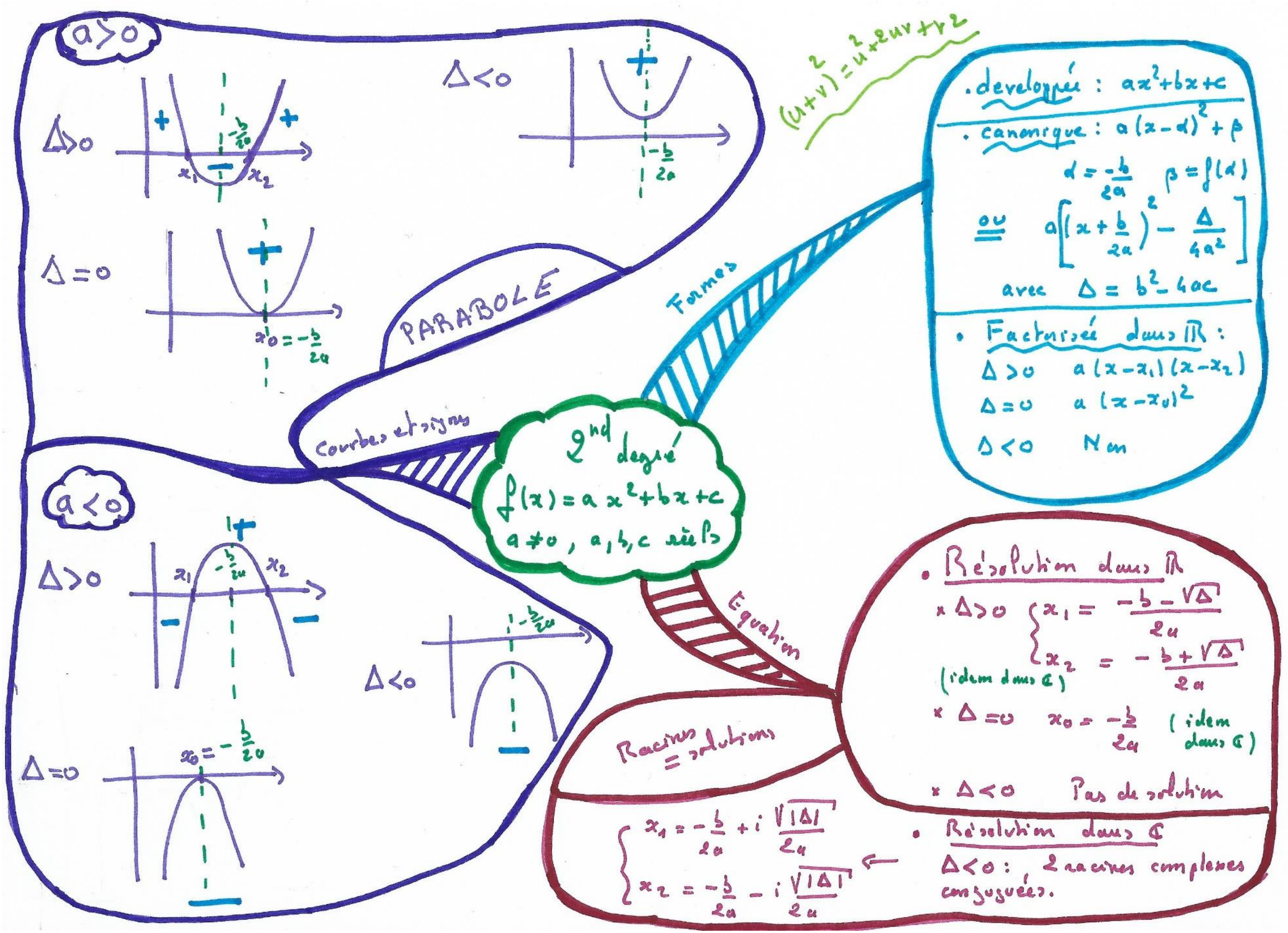
outils
- $a \leq b \Leftrightarrow a+c \leq b+c$
- $a \leq b \Leftrightarrow ac \leq bc$ Si $c > 0$
- $a \leq b \Leftrightarrow -b \leq -a$

Etude de signe
Montrer que $0 \leq B - A$

- Factoriser. Réduire au même dénominateur
- Tableau de signe.
  - Signe de ax^2+bx+c
  - Signe de $ax+b$
- Tableau de variation d'une fonction.
- Pour étudier un signe on peut transformer en $\leq$

Transformer le but
Si $A, B > 0$:
- $A^2 \leq B^2$
- $\frac{1}{B} \leq \frac{1}{A}$
- $\sqrt{A} \leq \sqrt{B}$
- $e^A \leq e^B$
- $\ln A \leq \ln B$
- …

Etape intermédiaire
$A \leq C$ et $C \leq B$


2^{nd} degré
$f(x) = ax^2 + bx + c$
$a \neq 0$, a, b, c réels
PARABOLE
Courbes et signes
$a > 0$
$\Delta > 0$
$+$ $-$ $+$
x_1 x_2 $-\frac{b}{2a}$
$\Delta = 0$
$x_0 = -\frac{b}{2a}$
$\Delta < 0$
$-\frac{b}{2a}$
$a < 0$
$\Delta > 0$
x_1 x_2 $-\frac{b}{2a}$
$\Delta = 0$
$x_0 = -\frac{b}{2a}$
$\Delta < 0$
$-\frac{b}{2a}$
Formes
$(u+v)^2 = u^2 + 2uv + v^2$
. developpée : $ax^2 + bx + c$
. canonique : $a(x-\alpha)^2 + \beta$
$\alpha = \frac{-b}{2a}$ $\beta = f(\alpha)$
ou $a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$
avec $\Delta = b^2 - 4ac$
• Factorisée dans $\mathbb{R}$:
$\Delta > 0$ $a(x-x_1)(x-x_2)$
$\Delta = 0$ $a(x-x_0)^2$
$\Delta < 0$ Non
Equation
Racines = solutions
• Résolution dans $\mathbb{R}$
× $\Delta > 0$ $\begin{cases} x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$
(idem dans $\mathbb{C}$)
× $\Delta = 0$ $x_0 = -\frac{b}{2a}$ (idem dans $\mathbb{C}$)
× $\Delta < 0$ Pas de solution
• Résolution dans $\mathbb{C}$
$\Delta < 0$: 2 racines complexes conjuguées.
$\begin{cases} x_1 = -\frac{b}{2a} + i\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a} \\ x_2 = -\frac{b}{2a} - i\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a} \end{cases}$

Équations de droites dans le plan

Cas de la tangente

Tangente à C_f au point d'abscisse a

$$y = \underbrace{f'(a)}_{\text{coefficient directeur.}}(x-a) + f(a)$$

→ détermination de $f'(a)$ connaissant 2 points de la tangente.

Détermination de m et p

$(d) = (AB)$ ($\not\parallel Oy$)

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

$$p = y_A - m x_A$$

Équations cartésiennes

- $(d) : ax + by + c = 0$

  $\vec{u} = (-b, a)$ vecteur directeur

- $(d') : a'x + b'y + c' = 0$

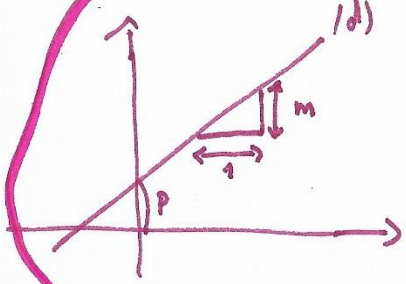
→ $(d) \parallel (d')$: (a,b) et (a',b') proportionnels $\Leftrightarrow ab' - ba' = 0$

→ $(d) = (d')$:
(a,b,c) et (a',b',c') proportionnels

→ $(d) \cap (d') = \{A\}$ si $(d) \not\parallel (d')$

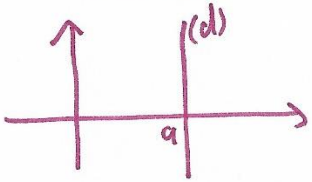
Les coordonnées de A solution de
$$\begin{cases} ax + by = -c \\ a'x + b'y = -c' \end{cases}$$

Équation réduite



- Si $(d) \parallel Oy$:

  $x = a$



- Si $(d) \not\parallel Oy$: $y = mx + p$

  Unique équation

  m = coefficient directeur

  p = ordonnée à l'origine

$(d') : y = m'x + p'$

$(d) \parallel (d') \Leftrightarrow m = m'$

$(d) = (d') \Leftrightarrow m = m'$ et $p = p'$

Agnès Rigny www.mathssansstress.fr