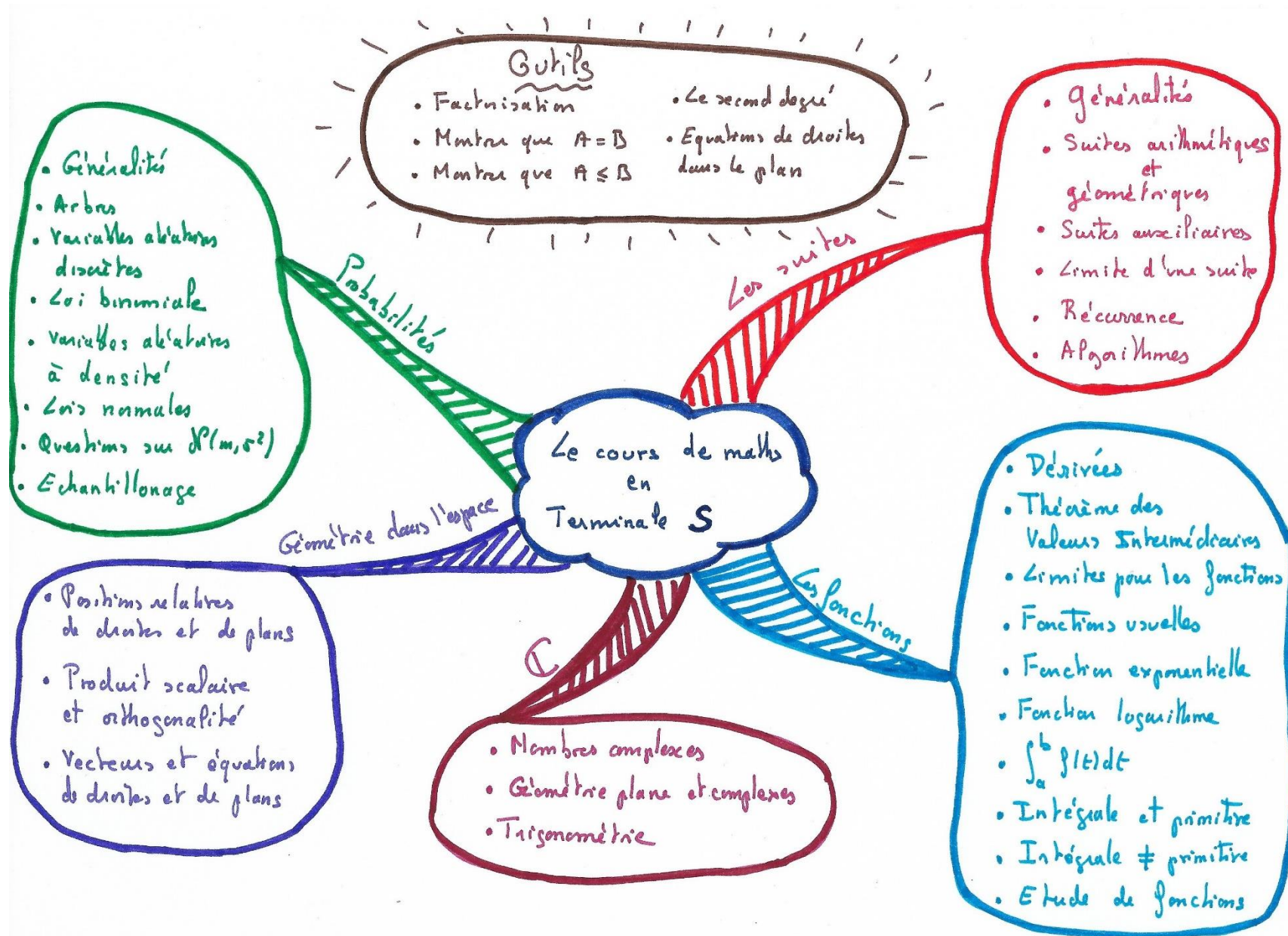




Les suites

- Montrer qu'elle est majorée (minorée)
il existe M tel que pour tout n , $u_n \leq M$
($u_n \geq M$)
- majorée + minorée = bornée
- Montrer qu'elle est croissante (décroissante)
Pour tout n , $u_n \leq u_{n+1}$ ($u_n \geq u_{n+1}$)

• Passer d'une
formule de récurrence
à une formule
explicite

- Trouver la limite
quand $n \rightarrow +\infty$
- Trouver un seuil :

ex: n_0 pour que $u_n > 10$ pour
 $n \geq n_0$

Dans les exercices

Quoi ?

Suites
généralités
(u_n)

Dans la vie

- Suite des températures
- Evolution de la taille d'un
enfant, d'une population
- Evolution du capital d'un compte épargne
- Tout phénomène mesuré régulièrement dans le temps.

• $u_0, u_1, u_2, u_3, \dots$
des nombres qui se suivent

• $n \mapsto u_n$ (fonction)



• "La suite des décimales de π ":

(3) 1, 4, 1, 5, 9, 2, 6, 5, 3, ...
(pas de formule, pas de logique)

• En exercice définie par

× Par récurrence

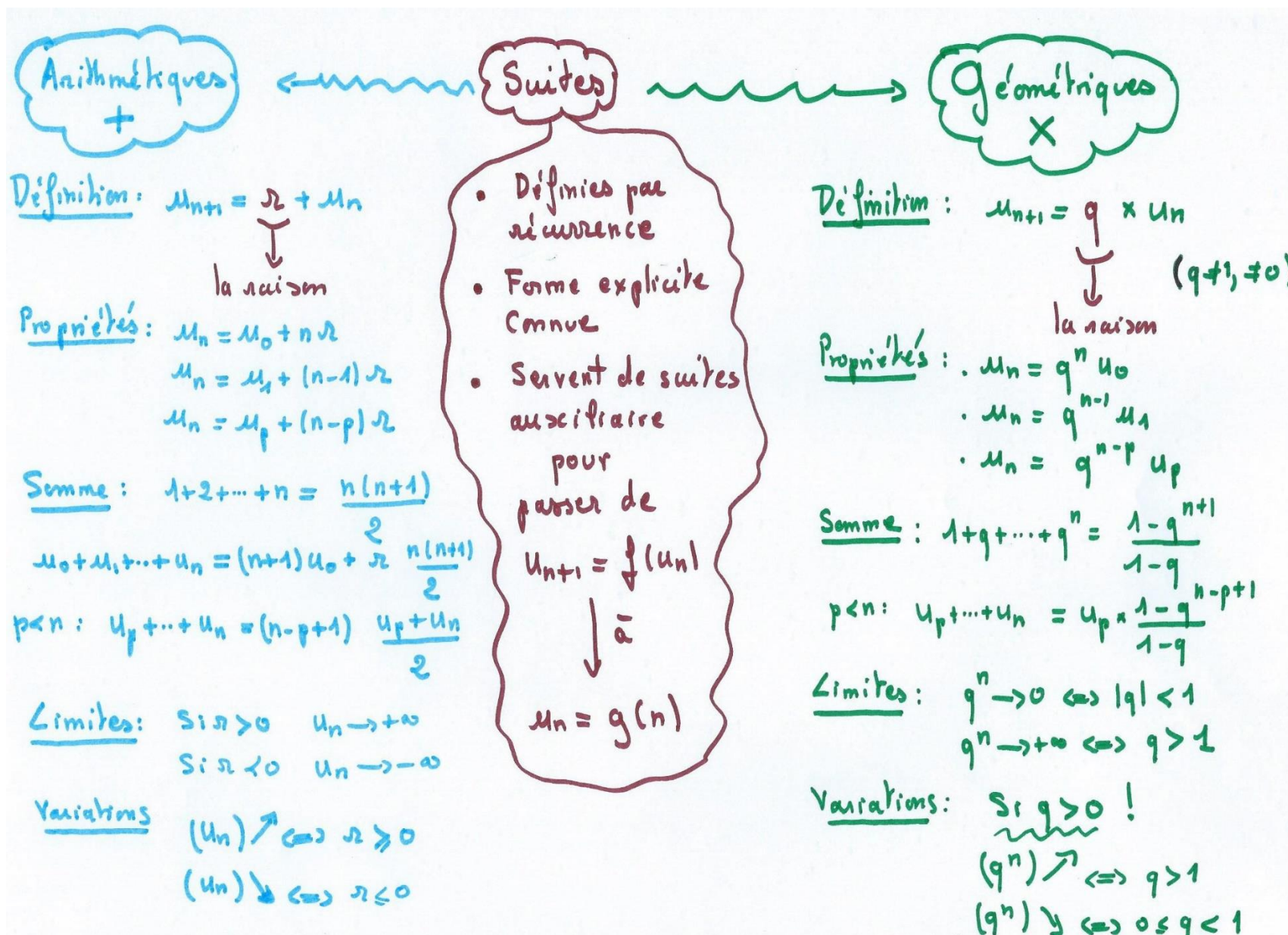
$$u_{n+1} = f(u_n)$$

ex: $u_{n+1} = 3 + u_n$

× Explicitement, par
une formule explicite

$$u_n = f(n)$$

ex: $u_n = 3n^2 + \sqrt{n}$



• $U_0 = 2, U_{n+1} = 3U_n - 2.$

$V_n = U_n - 1.$

Montrer que (V_n) est géométrique,
en déduire u_n en fonction de n .

① → ② : $V_{n+1} = U_{n+1} - 1$

② → ③ : $V_{n+1} = (3U_n - 2) - 1$

$V_{n+1} = 3U_n - 3$

③ → ④ : On a $U_n = V_n + 1$

donc $V_{n+1} = 3(V_n + 1) - 3 = 3V_n.$

D'où $V_n = 3^n V_0, U_n = 3^n(2-1) + 1 = 3^n + 1$

Exemple

Suite auxiliaire

C'est quoi ?

• Une suite définie
en fonction d'une autre,
qui va servir d'intermédiaire.

• Exemple :

$$(U_n) : \begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 3u_n - 2 \end{cases}$$

et $(V_n) :$

$V_n = U_n - 1.$

la suite auxiliaire.

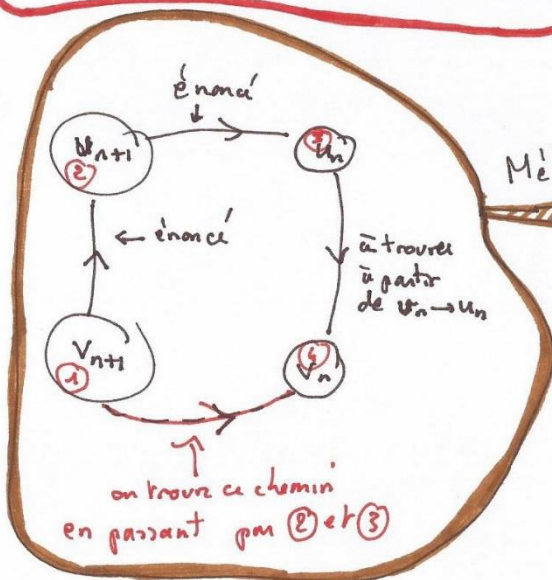
Pour quoi ?

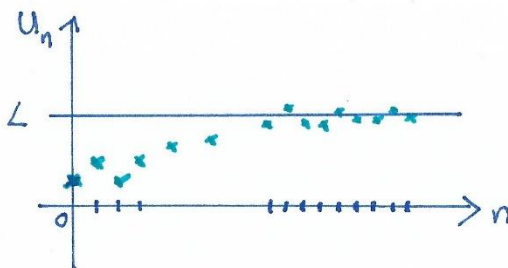
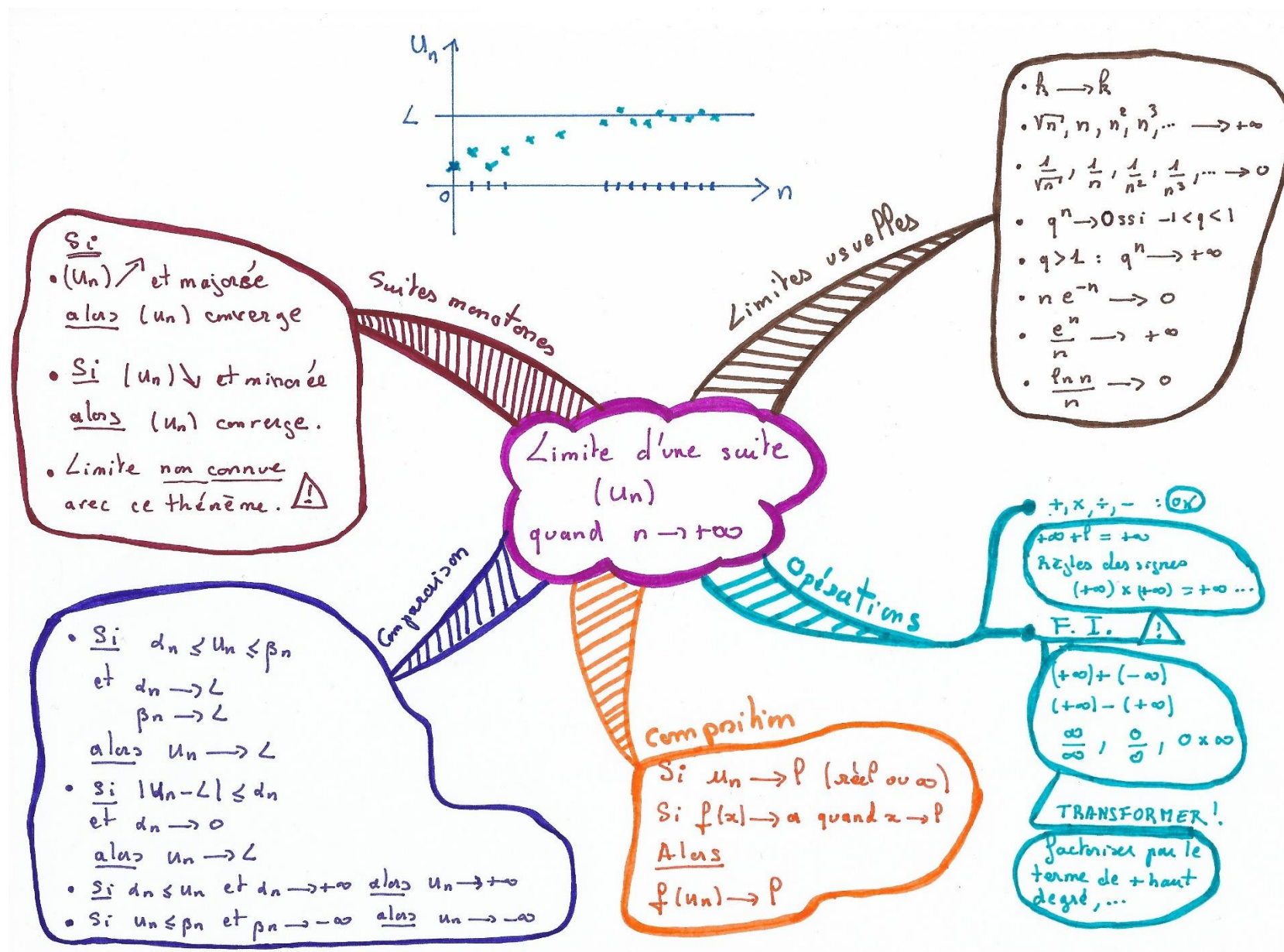
• Trouver u_n en
fonction de n ,
en passant par
une suite arithmétique
ou géométrique.

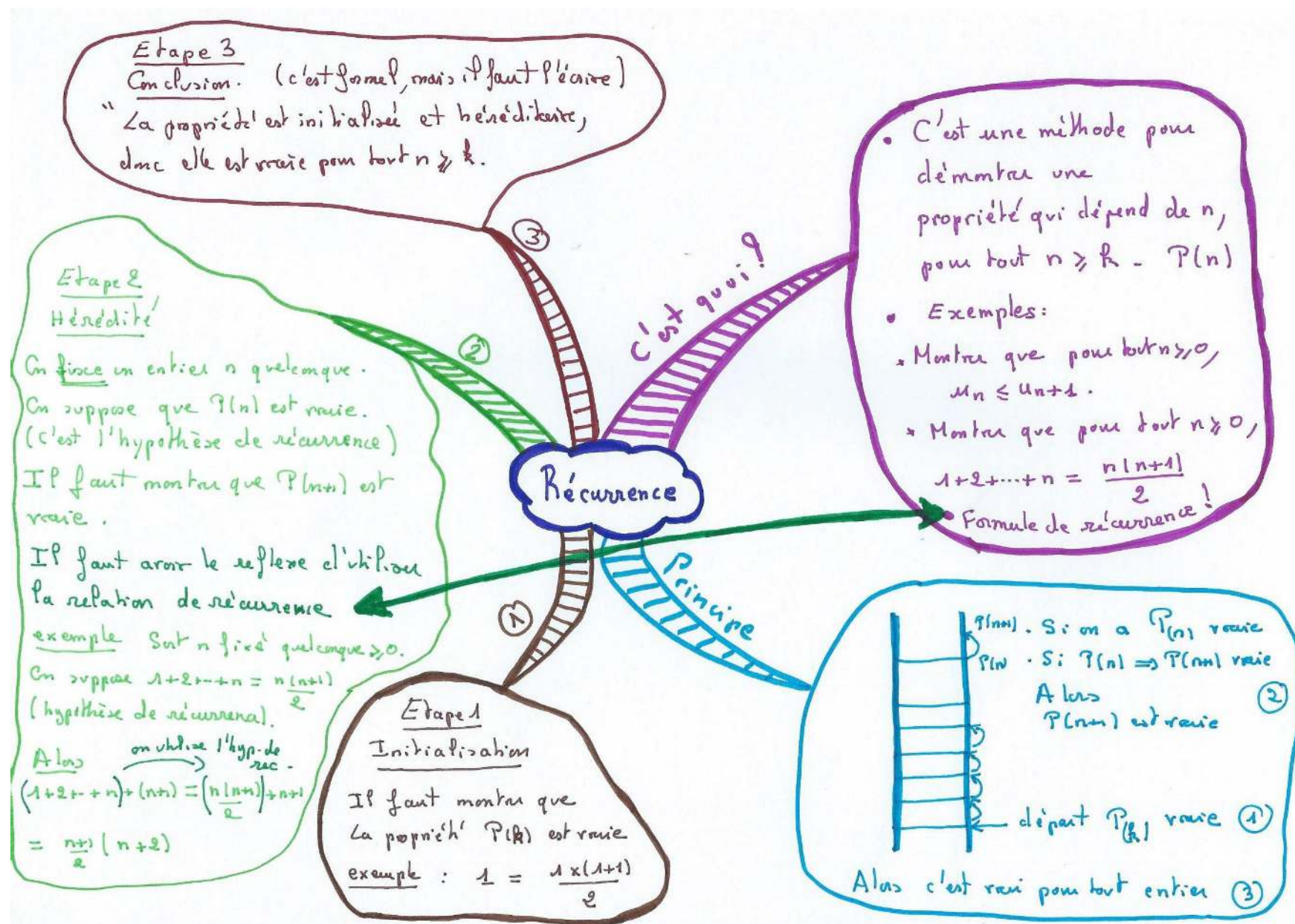
(En général.)

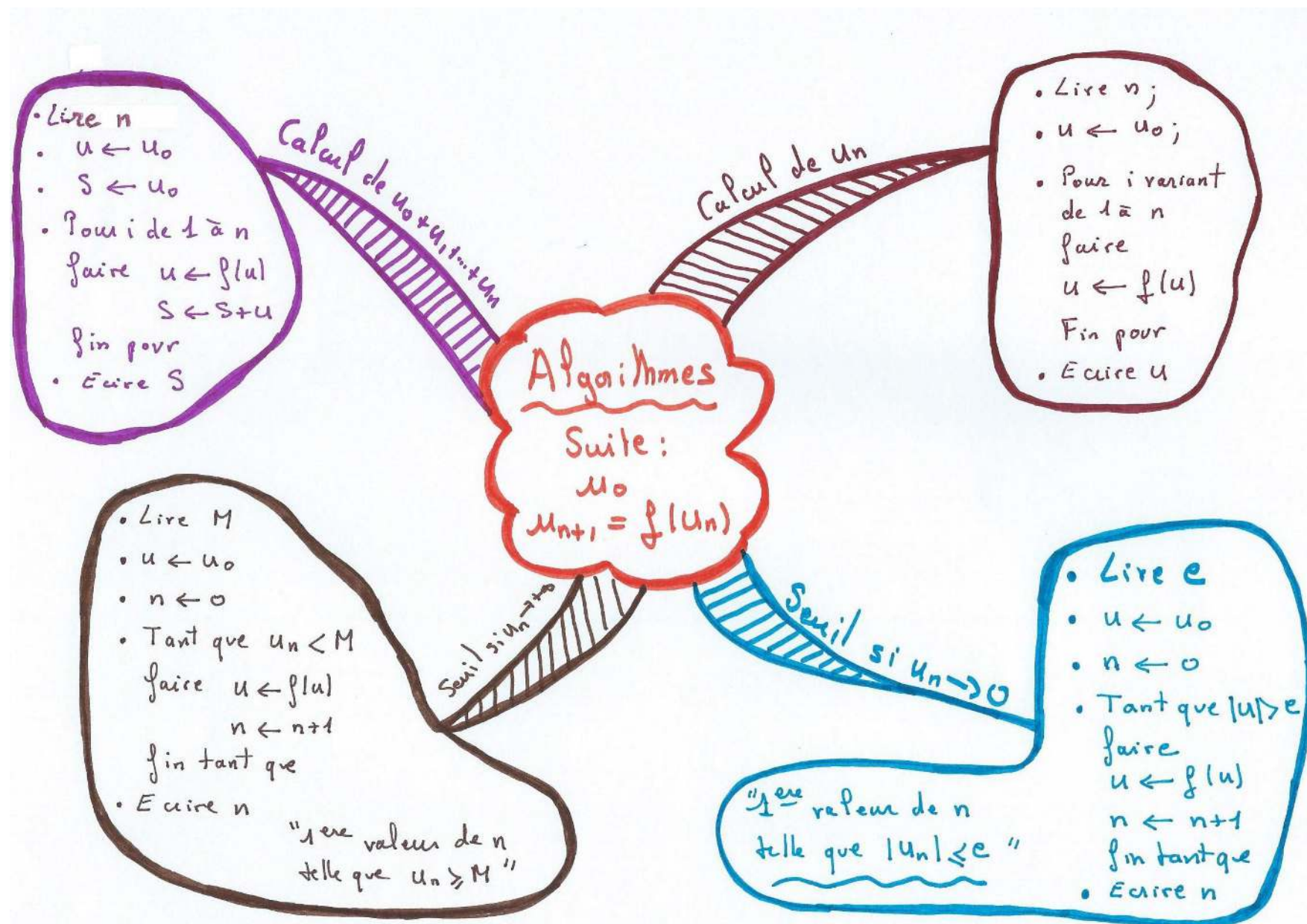
• On trouve la limite
de (u_n) en passant
par celle de (v_n) ...

Méthode











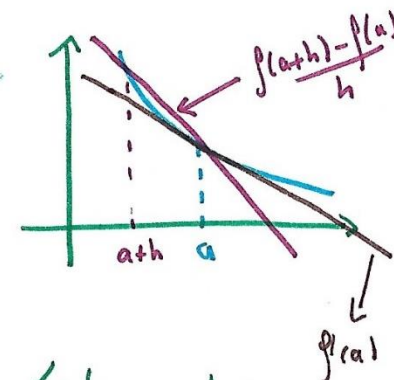
Agnès Rigny www.mathssansstress.fr

Les fonctions

- Étudier des fonctions
- Trouver des max, min.
- Préciser la courbe (tangente)
- Valeurs approchées de $f(a+h)-f(a) \approx f'(a) \cdot h$

Revenir les équations de droites

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$



Lecture graphique

- La tangente en a :
 $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

{ Droite passant par $(a, f(a))$
coefficient directeur : $f'(a)$

$$f' \geq 0 \Rightarrow f \nearrow$$

$$f' \leq 0 \Rightarrow f \searrow$$

On s'intéresse au signe de $f'(x) \rightarrow$ facteurs !
max ou min $\rightarrow f'(a) = 0$ ou au bord.

x	
$f'(x)$	$+ \quad 0 \quad - \quad 0 \quad +$
f	$\nearrow \quad \searrow \quad \nearrow$

Tableau de variation

Dérivées

Fonction f'

• Opérations

$$(ku)' = k u'$$

$$(u+v)' = u' + v'$$

$$(uv)' = u'v + v'u$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$

$$(f(ax+b))' = a f'(ax+b)$$

• $x \rightarrow f'(x)$

• Dérivées nouvelles

$$(x^n)' = n x^{n-1}$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(u^n)' = u' n u^{n-1}$$

$$(e^u)' = u' e^u$$

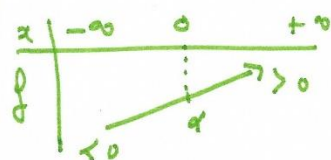
$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

$$(\cos(u))' = -u' \sin(u)$$

$$(\sin(u))' = u' \cos(u)$$

Avec un tableau de variation.

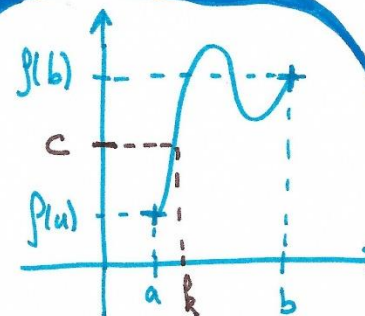


- f est continue sur $] -\infty + \infty [$
- $0 \in] \lim_{x \rightarrow -\infty} f, \lim_{x \rightarrow +\infty} f [$
- f est strictement croissant.

Donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique α tel que $f(\alpha) = 0$.

Rédaction

Quoi ?



- c est une valeur intermédiaire entre $f(a)$ et $f(b)$
- f est continue (dérivable ou)
- Alors il existe k entre a et b tel que $f(k) = c$

Corollaire

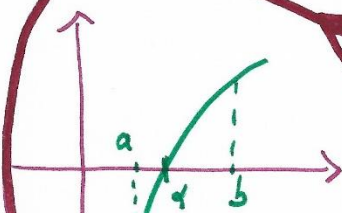


Si f est en plus strictement monotone, alors k est unique

Théorème des Valeurs Intermédiaires

Encadrement

Pour qui ?

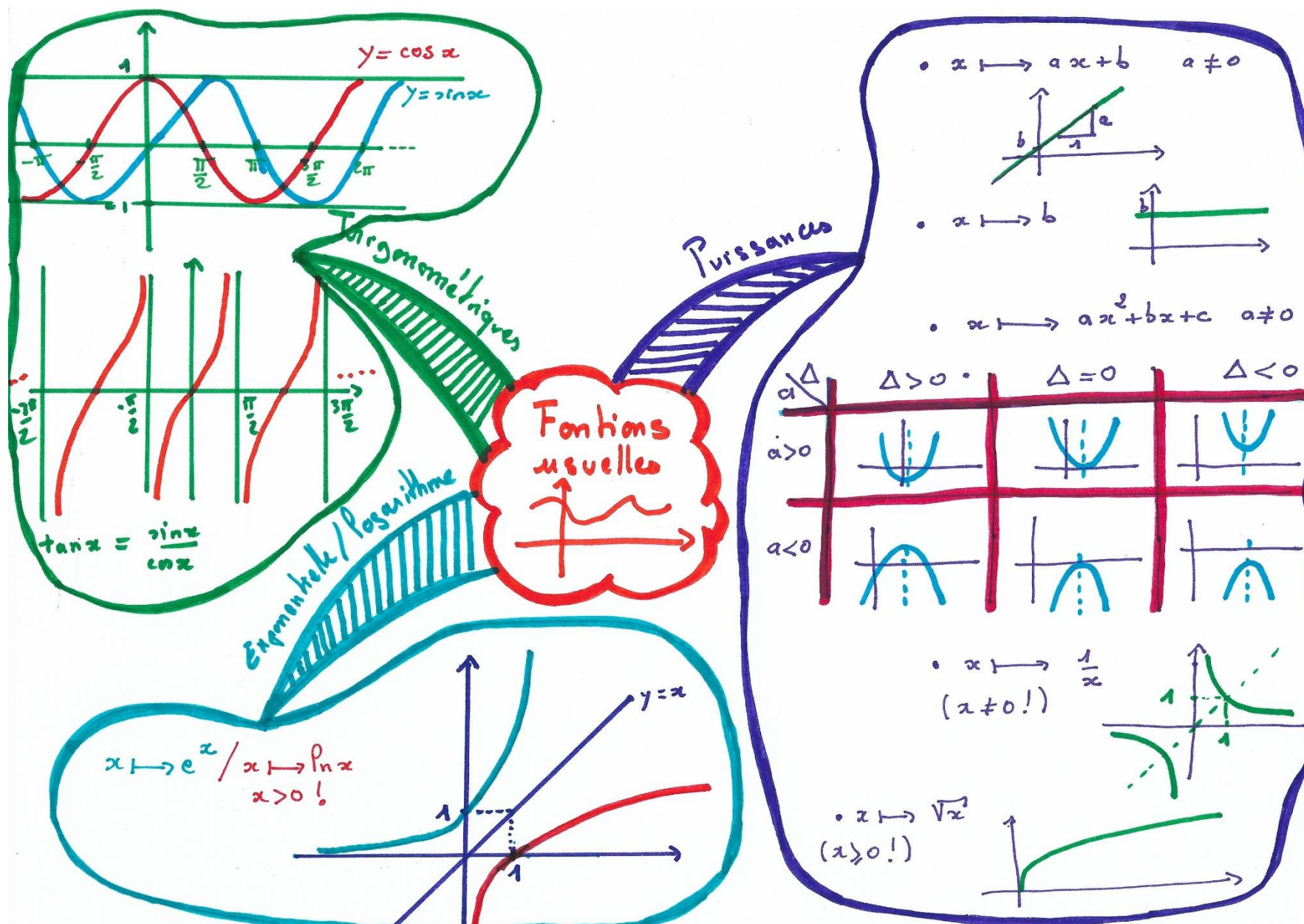


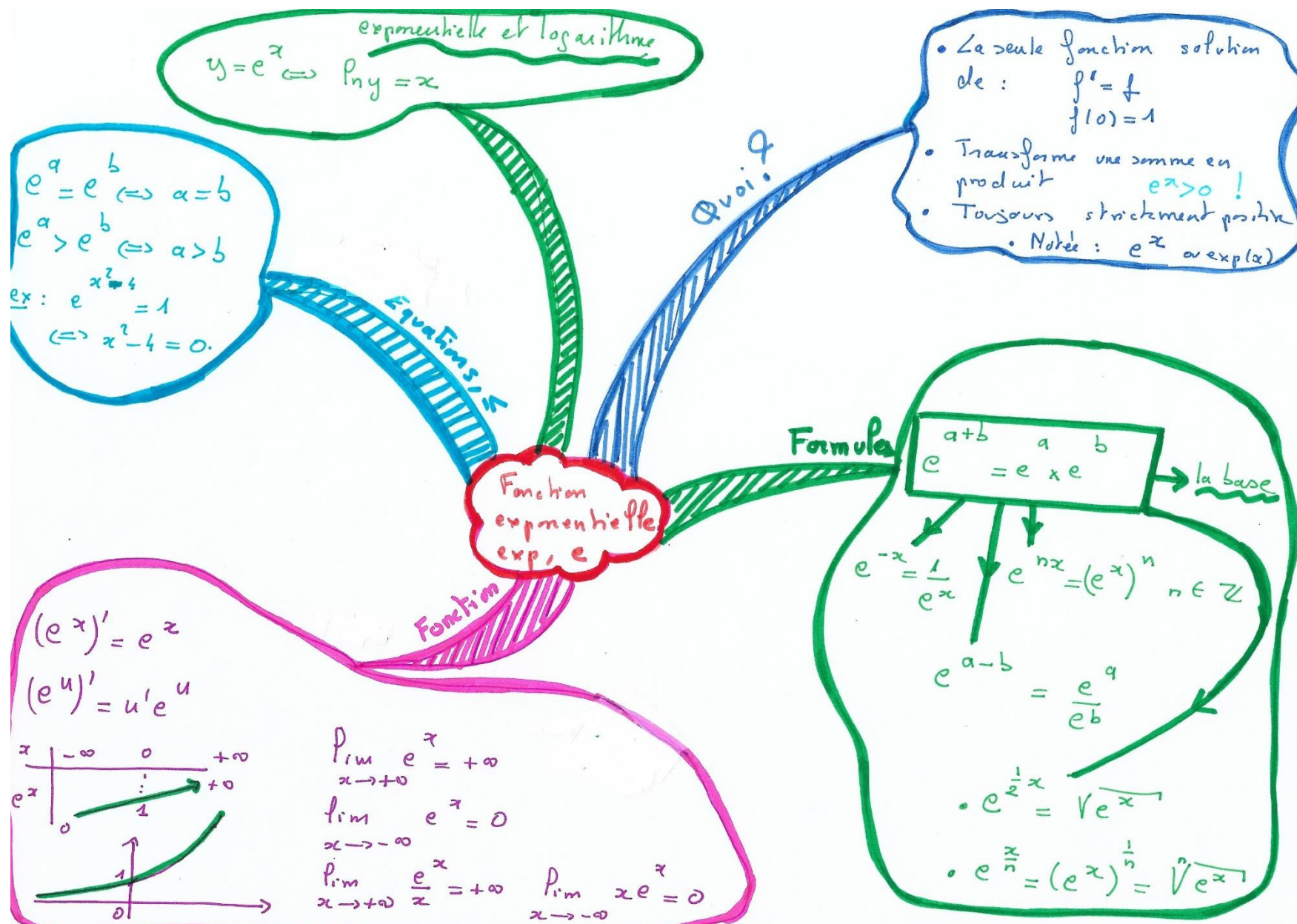
$f(a) < 0 < f(b)$
 f strict
 $\exists ! \alpha$ tel que $f(\alpha) = 0$.
 $a \leq \alpha \leq b$.

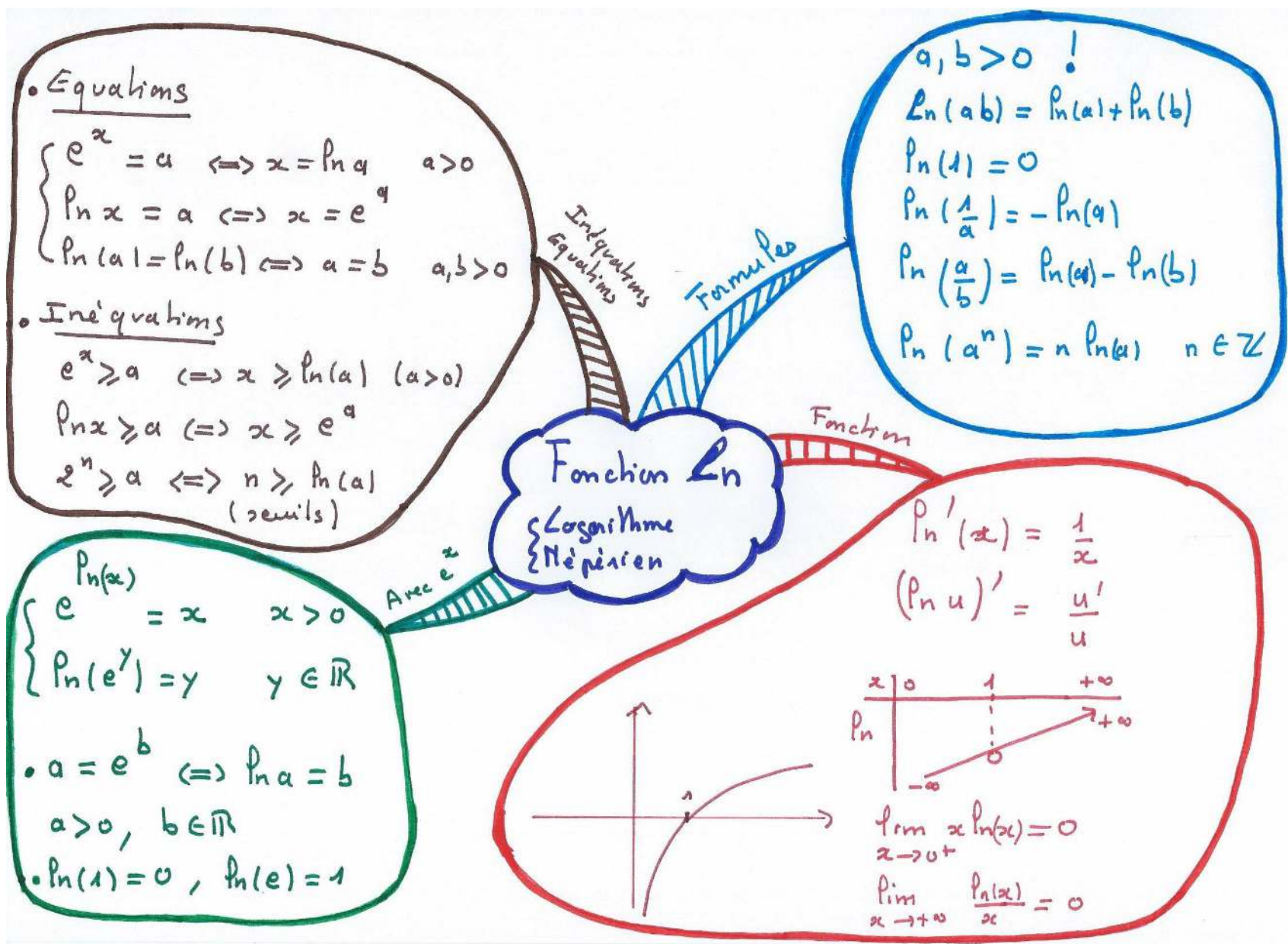
Faire une table de valeurs pour encadrer α .

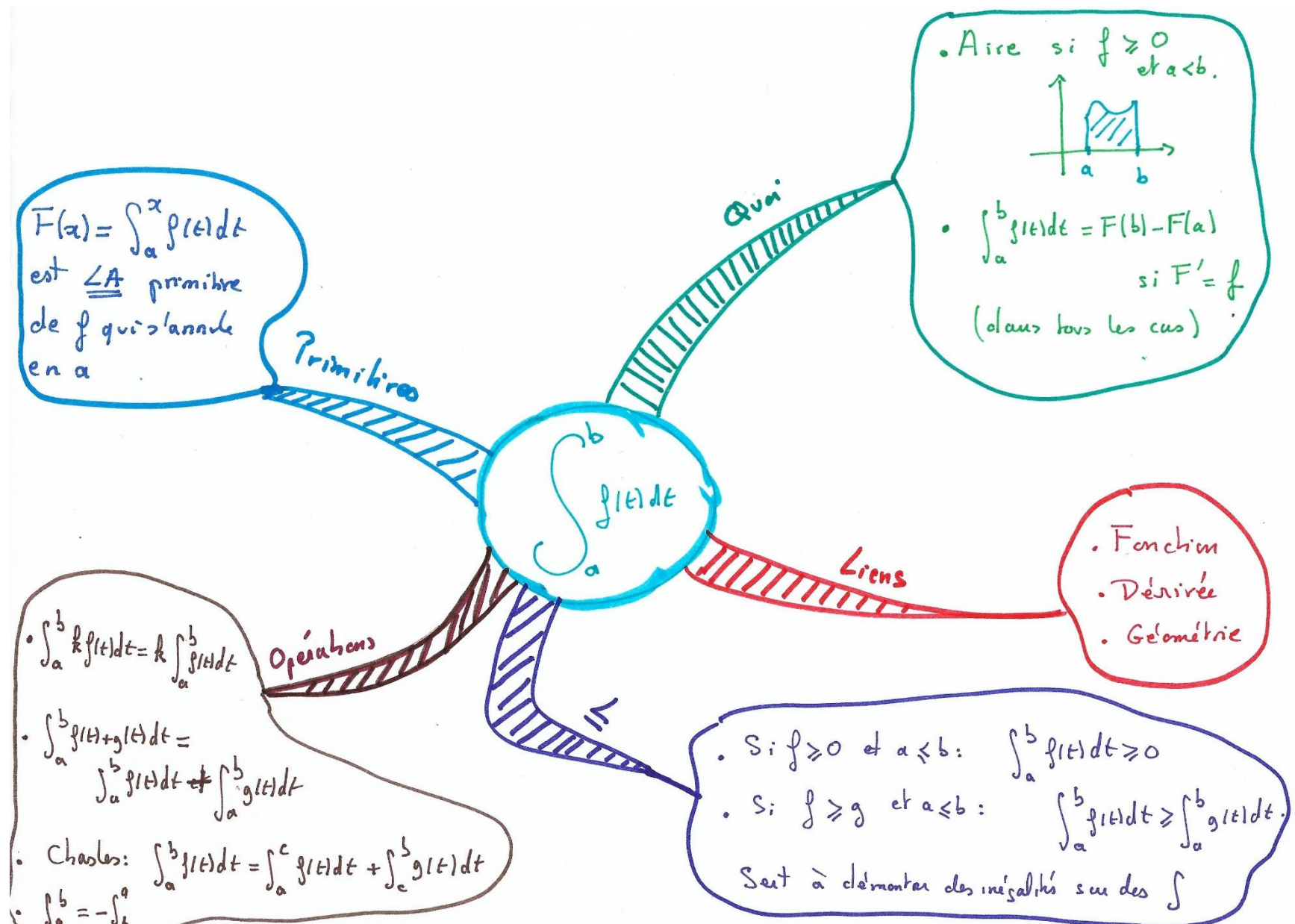
- Pour répondre aux questions sur :
- le nombre de solutions d'une équation du type $f(x) = c$
 - Montrer qu'il existe α tel que $f(\alpha) = c$
 - Montrer qu'il existe un unique α tel que ...

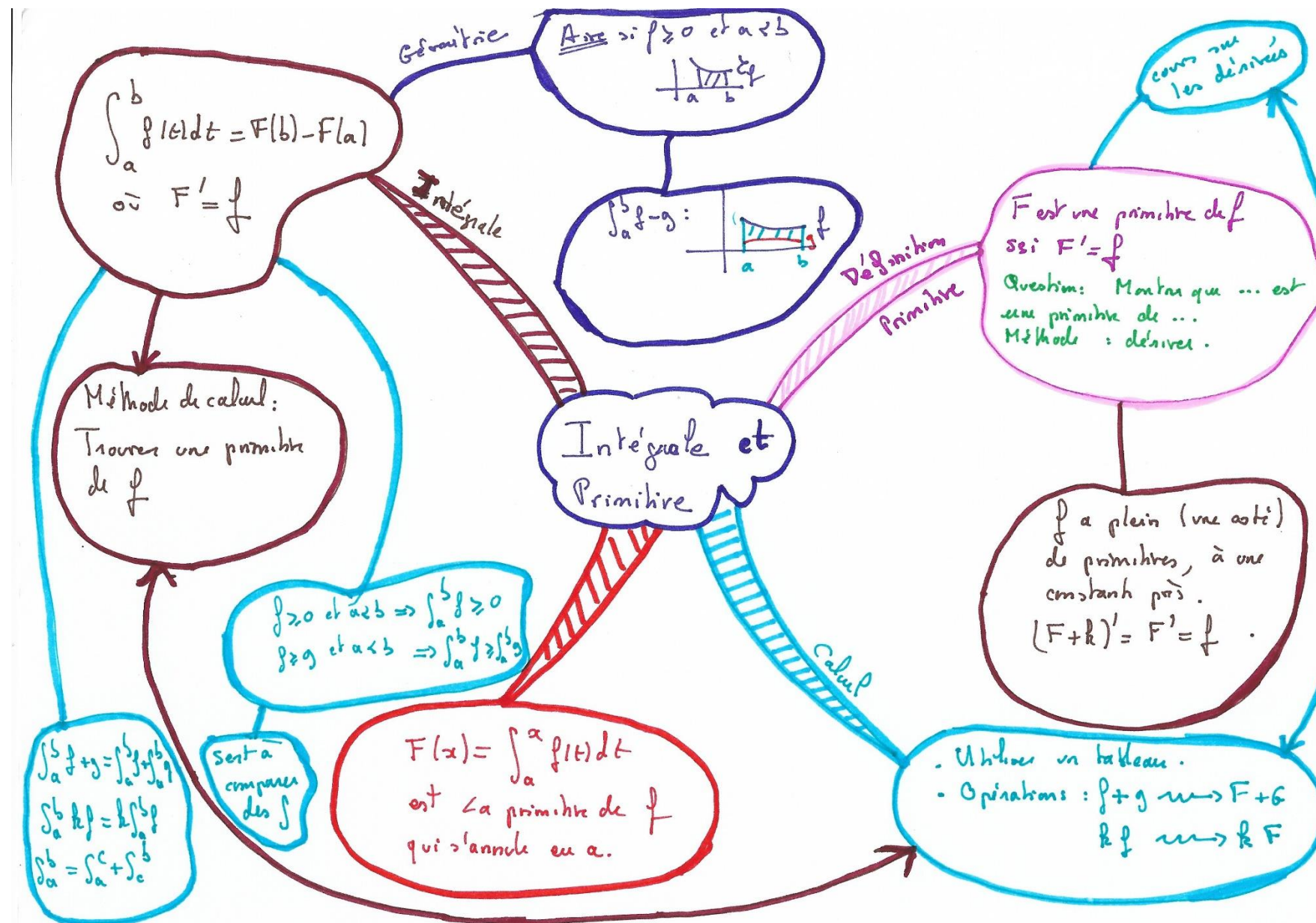












Intégrale $\neq$ Primitive

Intégrale

$\int_a^b f(t) dt$
c'est un
NOMBRE.

~~Dérivée~~ une
intégrale

Points communs

• $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$

ou

$F' = f$

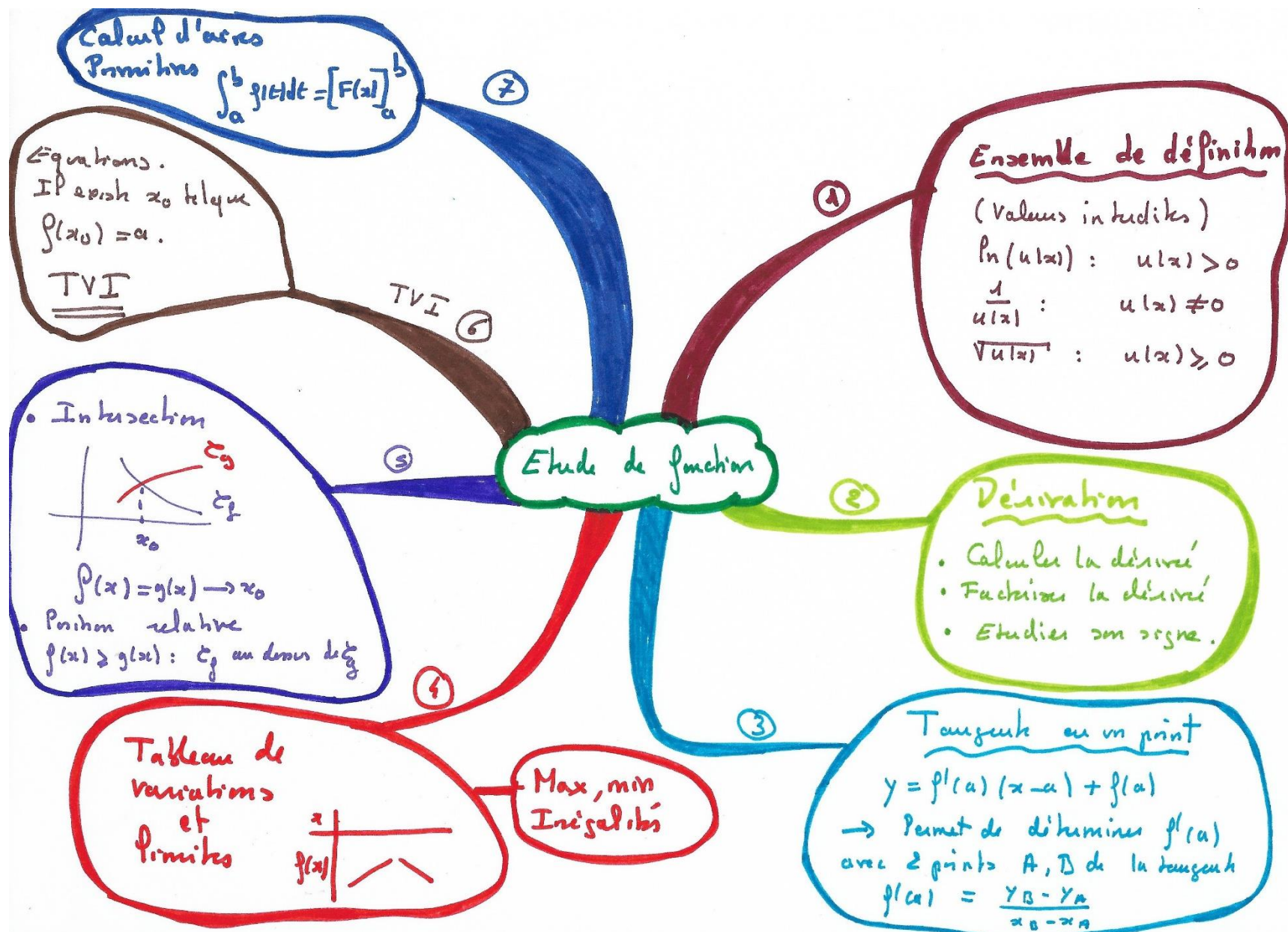
• $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$
est LA
primitive de f qui
s'annule en a

Primitive

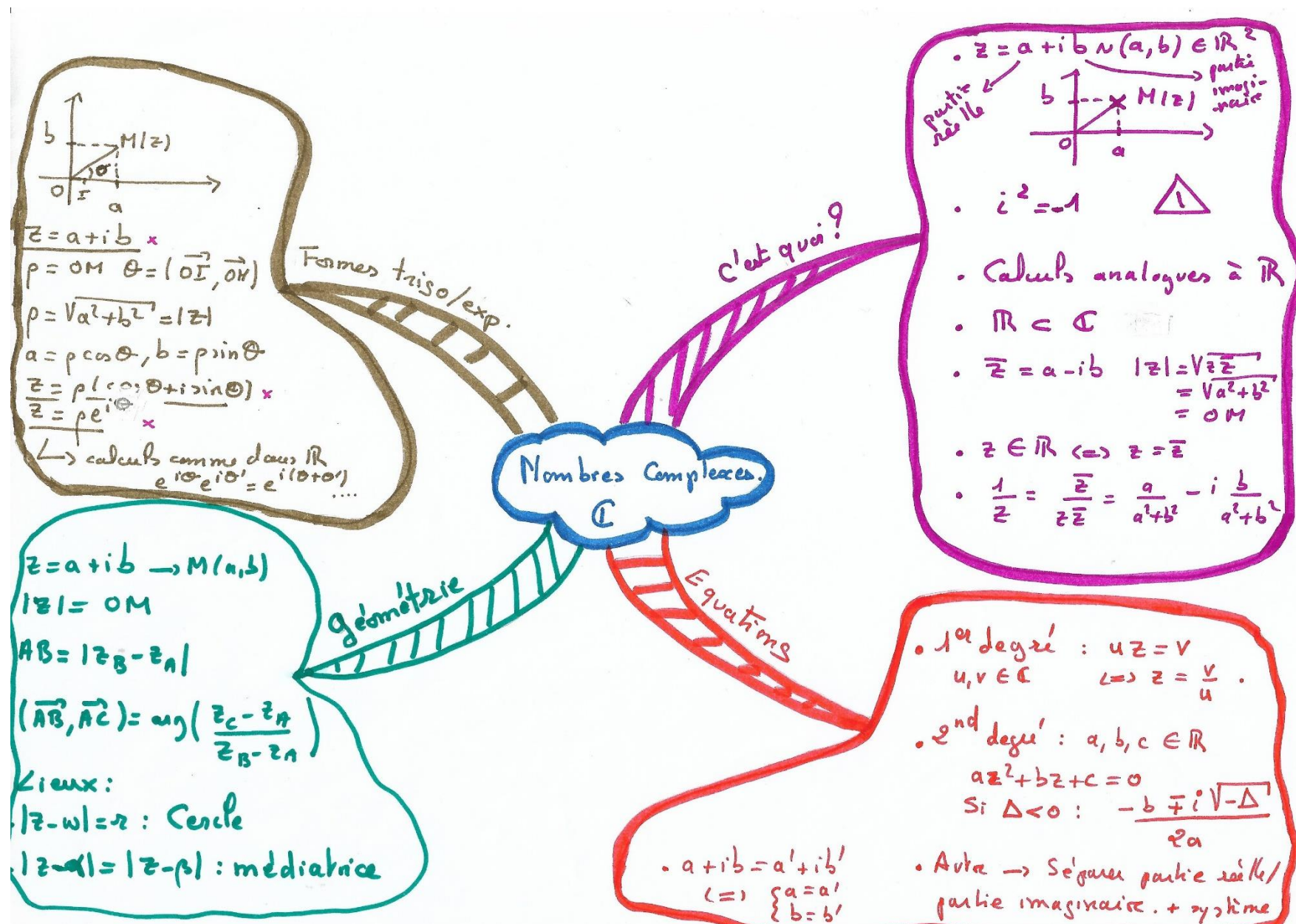
Une primitive
c'est une
FONCTION.

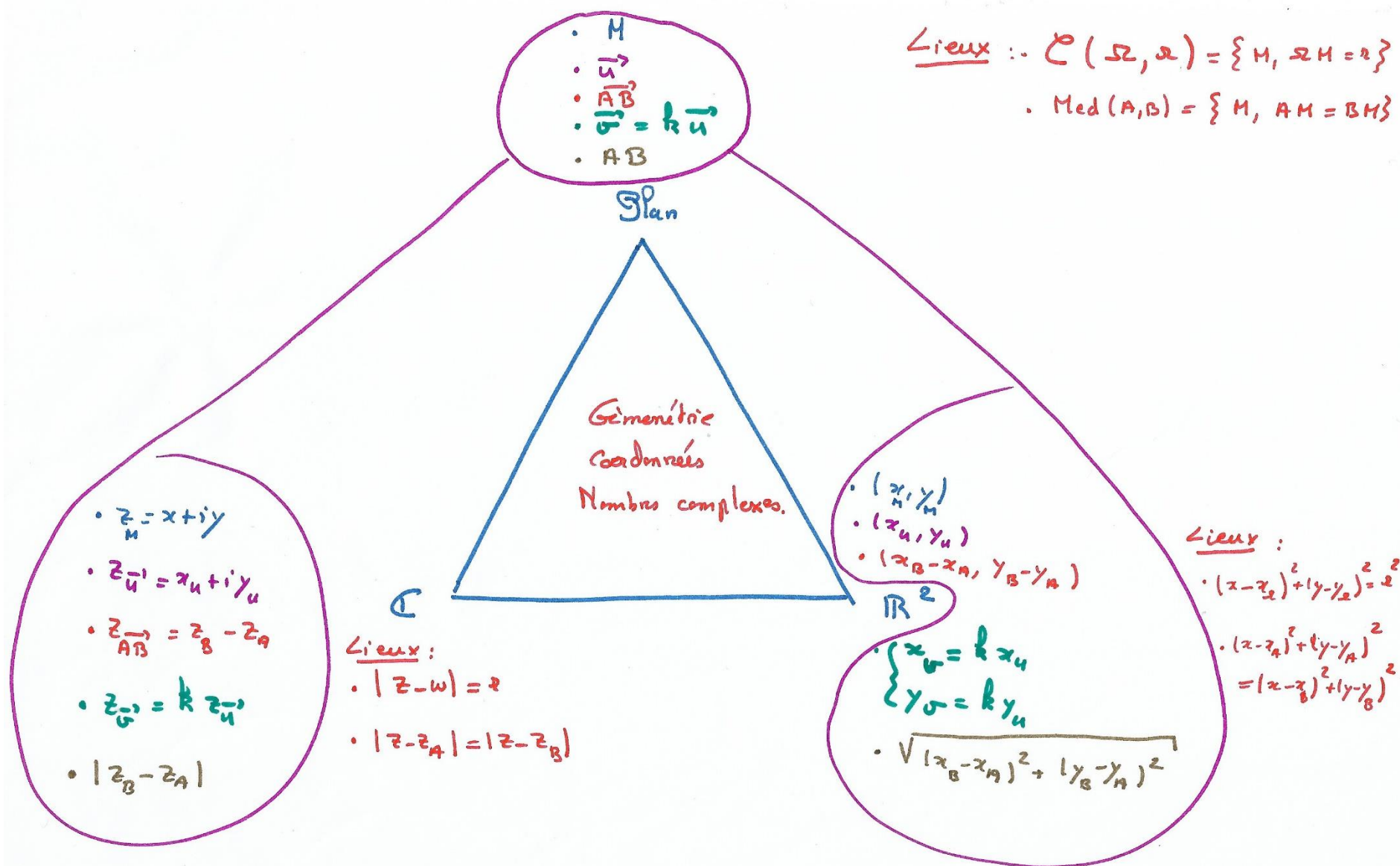
f a une infinité
de primitives.

$F' = f$
 $(F + R)' = f$
pour tout R



Les nombres complexes et la trigonométrie





$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

(Pythagore)

Duplication :

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\cos(-x) = \cos x$$

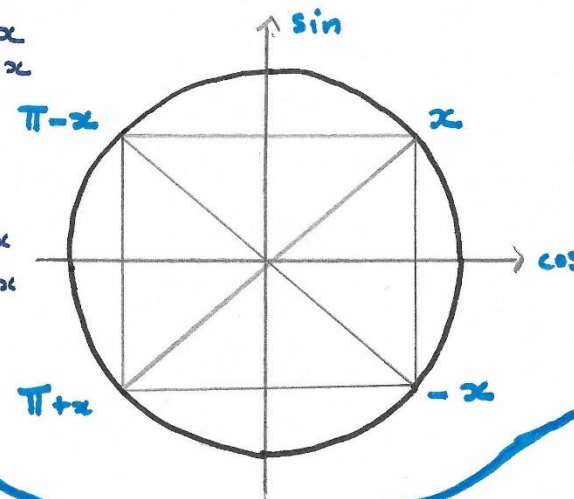
$$\sin(-x) = -\sin x$$

$$\cos(\pi-x) = -\cos x$$

$$\sin(\pi-x) = \sin x$$

$$\cos(\pi+x) = -\cos x$$

$$\sin(\pi+x) = -\sin x$$



Trigonométrie

Formules

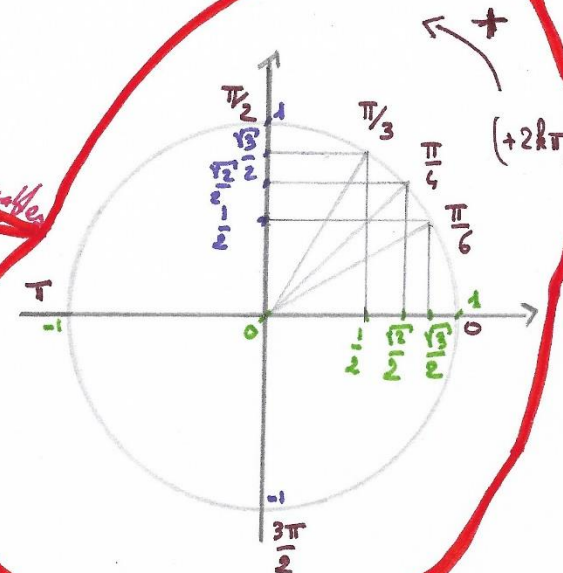
Symétries

Equations

Angles remarquables

$$\cos x = \cos a \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \textcircled{ou} x = -a + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\sin x = \sin a \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \textcircled{ou} x = \pi - a + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

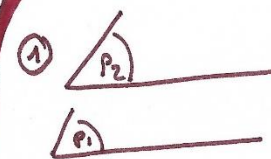


La géométrie dans l'espace

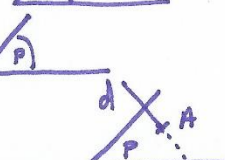
Théorèmes

Positions relatives de droites et de plans

2 plans P_1, P_2

- ① 
 - parallèles
 - intersection vide
- ② 
 - confondus $P_1 = P_2$
- ③ 
 - sécants.
 - $P_1 \cap P_2 = d$ droite.

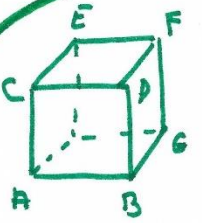
Droite d et plan P

- ① $d \cap P = d \leftarrow d \subset P$ 
- ② $d \cap P = \emptyset \leftarrow d \parallel P$ strictement 
- ③ d et P sécants
 $\hookrightarrow d \cap P = \{A\}$ 

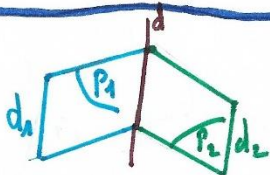
Tracé de section

2 droites

- sécantes: (AB) et (AC) ou parallèles: (AB) et (CD)
 $\hookrightarrow$ coplanaires
- ni sécantes, ni $\parallel$
 $\hookrightarrow$ non coplanaires (AB) et (FG)



Toit



- $d_1 \parallel d_2$
- $d_1 \subset P_1$ et $d_2 \subset P_2$
- alors $d = P_1 \cap P_2$ est $\parallel d_1$ et d_2

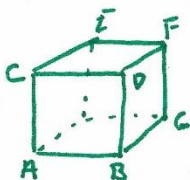
$d \subset P$ ssi

- elle passe par 2 points de P
- ou
- elle passe par un point de P et est $\parallel$ à une droite de P

$\hookrightarrow$ Tracé de section

• orthogonales =
vecteurs directeurs orthogonaux : (AB) et (FC)

• perpendiculaires =
orthogonales
et
sécantes : (AB) et (AC)



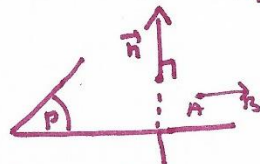
Droites orthogonales
Droites perpendiculaires

$$d = [A, \vec{u}]$$

$$d \perp P$$

$$\Leftrightarrow \vec{u} \text{ normal à } P$$

• P_1 et P_2 sont orthogonaux
ssi $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$
avec $\vec{n}_1$ normal à P_1 , $\vec{n}_2$ normal à P_2



$\vec{n}$ est normal à P ssi
 $\vec{n} \cdot \vec{AB} = 0$ pour tous A, B de P .

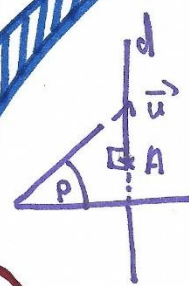
• $P = \{ M \text{ tel que } \vec{AM} \cdot \vec{n} = 0 \} \rightarrow \text{équation cartésienne}$

• $P: ax+by+cz+d=0$ $\vec{n}=(a,b,c)$

Produit scalaire
et
orthogonalité $\perp$

vecteur normal

C'est quoi?

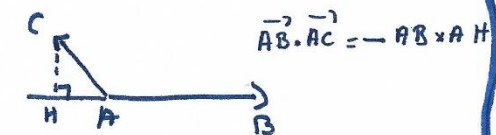
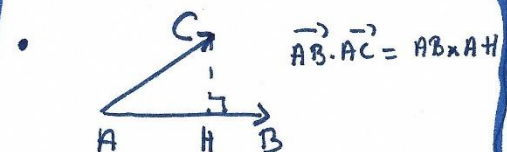


• $\vec{u}$ et $\vec{v}$, représentés par
 $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$.

Cn se retrouve dans le plan
ABC (ou sur une droite, donc
dans un plan).

Cn a alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{AB} \cdot \vec{AC}$
(définition du produit scalaire
dans le plan).

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$



• Dans un repère orthonormé :

$$\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

Mêmes propriétés que dans le plan
 $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
etc.

En repère orthonormal !

- $P: ax+by+cz+d=0$
 $\vec{n}=(a,b,c)$ vecteur normal à P
- $P': a'x+b'y+c'z+d'=0$
 $P=P' \Leftrightarrow (a,b,c,d)$ proportionnel à (a',b',c',d')
 $P//P' \Leftrightarrow (a,b,c)$ proportionnel à (a',b',c')
- $d = P \cap P'$ avec $P \not\parallel P'$

$$\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$$
avec (a,b,c) et (a',b',c') non proportionnels.

Equation cartésienne

Droites, plans, vecteurs

Vecteurs et équations de droites et de plans

Représentation paramétrique

- $d = [A, \vec{u}]$
 $M \in d \Leftrightarrow \vec{AM} = t\vec{u}, t \in \mathbb{R}$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} x = x_A + t x_u \\ y = y_A + t y_u \\ z = z_A + t z_u \end{cases}, t \in \mathbb{R}$
- $P = [A, \vec{u}, \vec{v}]$
 $M \in P \Leftrightarrow \vec{AM} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} x = x_A + \alpha x_u + \beta x_v \\ y = y_A + \alpha y_u + \beta y_v \\ z = z_A + \alpha z_u + \beta z_v \end{cases}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

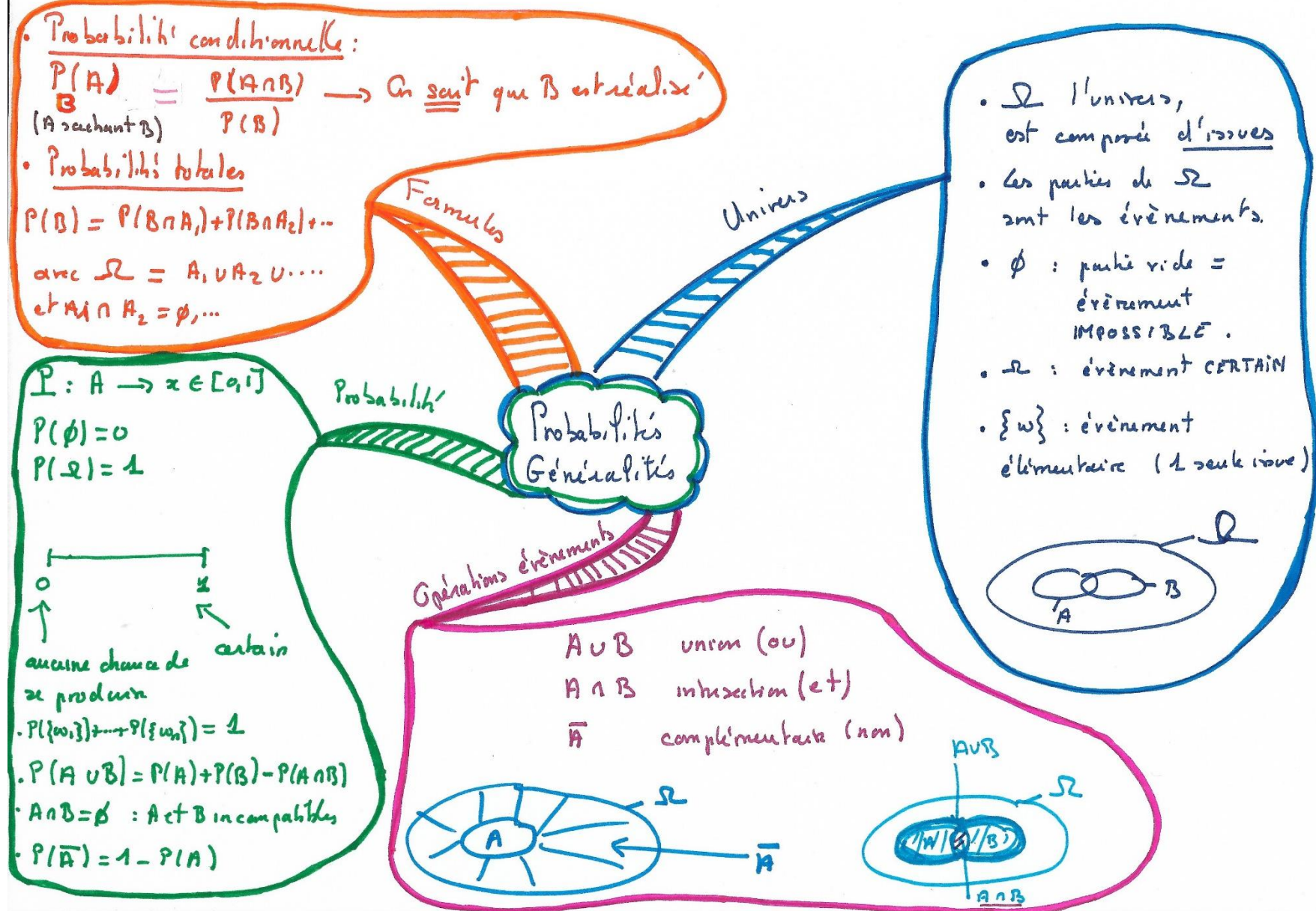
$$AB = \|\vec{AB}\|$$

$$= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v$$

- $P = 3$ points non alignés (ABC)
1 point ^{ou} et 2 vecteurs non colinéaires $[A, \vec{u}, \vec{v}]$
- $d = 2$ points $\neq$ (AB)
1 point ^{ou} et 1 vecteur $\neq \vec{0}$
 $[A, \vec{u}]$
- $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ coplanaires ssi il existe α, β, γ réels t.q.
 $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0}$
- Repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ avec $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ non coplanaires
 $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$
 $M \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{OM} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$
 $\vec{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$
 $\vec{u}, \vec{v}$ colinéaires $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix}$
 $I = \text{milieu de } [A, B]:$ proportionnels.
 $x_I = \frac{1}{2}(x_A + x_B)$ etc.

Les probabilités



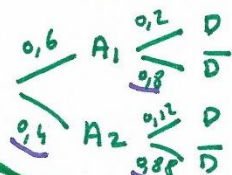
• Repérer le nom des événements.

• Repérer les choix
(A, $\bar{A}$) ou (A₁, A₂, A₃)

• Repérer les mots clés
"parmi", "sachant",
et les probas conditionnelles.

• Construire l'arbre et choisir
les formules. (la somme des
branches = 1)

On fabrique des cadenas
avec 2 machines : A₁ et A₂
60% de la production vient de A₁
Parmi les cadenas de la
machine A₁, 20% sont
défectueux, parmi ceux
de la machine A₂, 12%
sont défectueux.



$$P(A \cap B) \neq P_A(B)$$

⚠ ⚠

Faire l'arbre

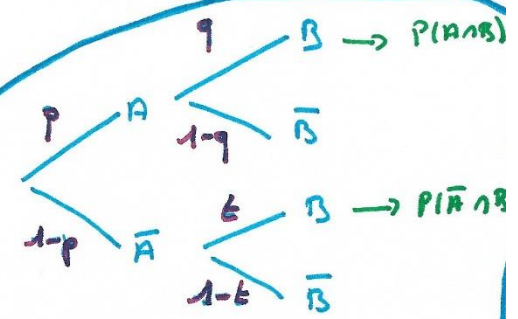
Arbres et Probabilités

Proba de la cause

$$P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A) = \frac{P(A) P_A(B)}{P(B)}$$

A, $\bar{A}$



• Principe de la somme :

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$$

• Principe du produit

$$P(A \cap B) = p(A) P_A(B)$$

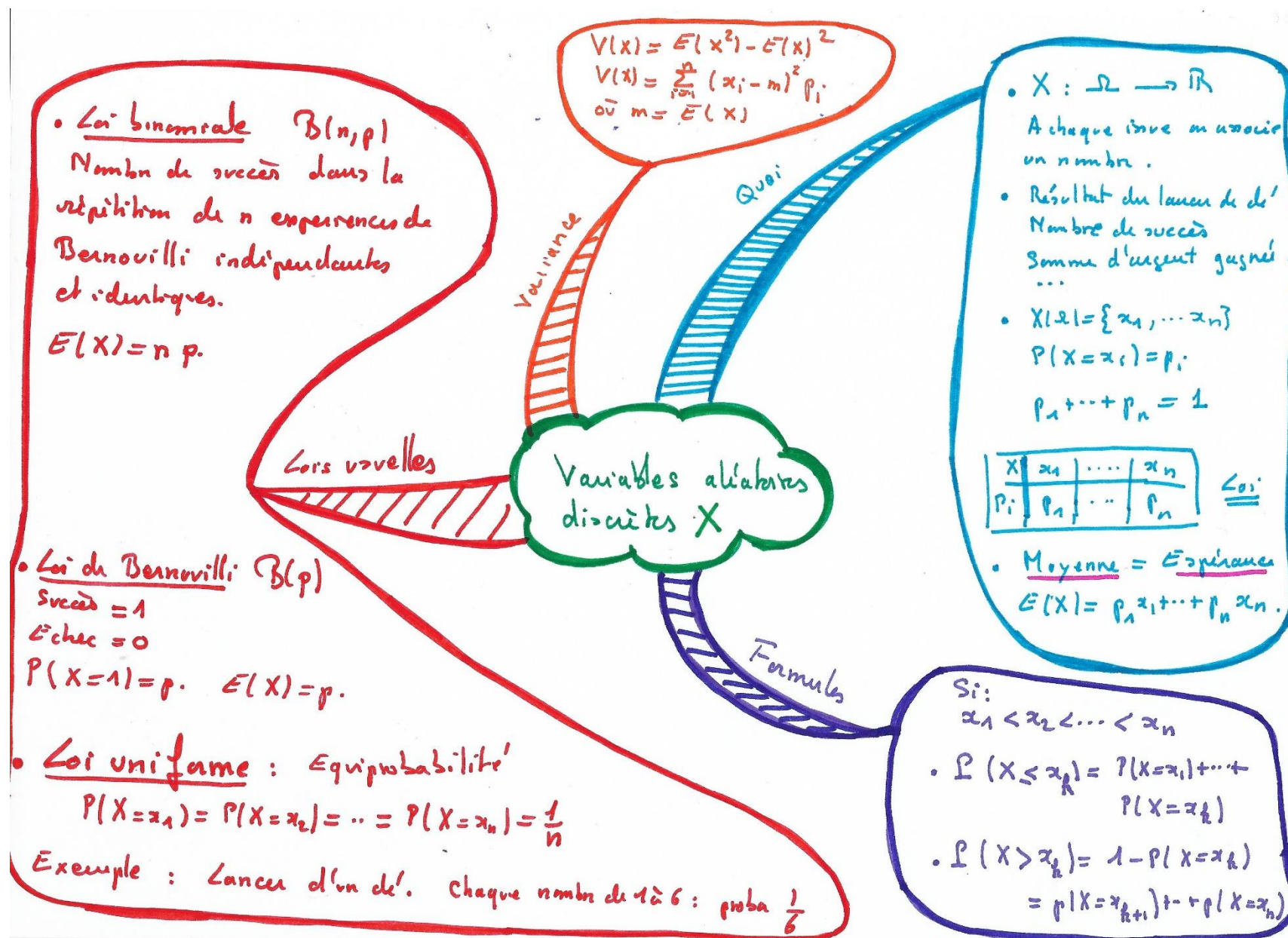
$$P(A \cap B) = p \times q$$

généralisation

(A₁, A₂, ..., A_n) système complet

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i \cap B)$$

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i) P_{A_i}(B)$$



Formules $X \hookrightarrow B(n, p)$:

$$X(\Omega) = \{0, 1, 2, \dots, n\}$$

$$P(X=k) = \underbrace{\binom{n}{k}}_{\text{nombre de chemins dans l'arbre avec } k \text{ succès}} p^k \underbrace{(1-p)^{n-k}}_{\text{proba des } n-k \text{ "échecs"}}$$

$$P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k-1)$$

$$P(X \leq k) = P(X=0) + \dots + P(X=k)$$

Avec la calculatrice.

Ti : Binompdf $(n, p, k) = P(X=k)$

Binomcdf $(n, p, k) = P(X \leq k)$.

$$E(X) = np$$

$$V(X) = p(1-p)n$$

Rédaction : Pour montrer que $X \hookrightarrow B(n, p)$:

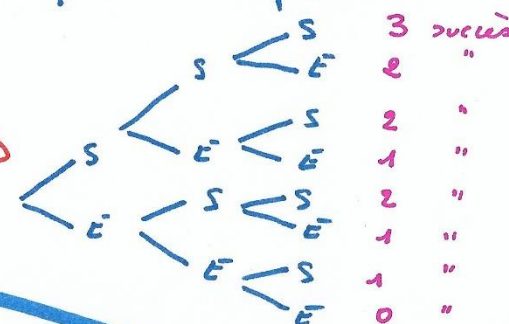
On a un schéma de Bernoulli, car on répète (n) fois des épreuves de Bernoulli, identiques et indépendantes, de proba de succès (p)

• Épreuve de Bernoulli:



• Schéma de Bernoulli:

Répétition de $[n]$ épreuves de Bernoulli, identiques et indépendantes.



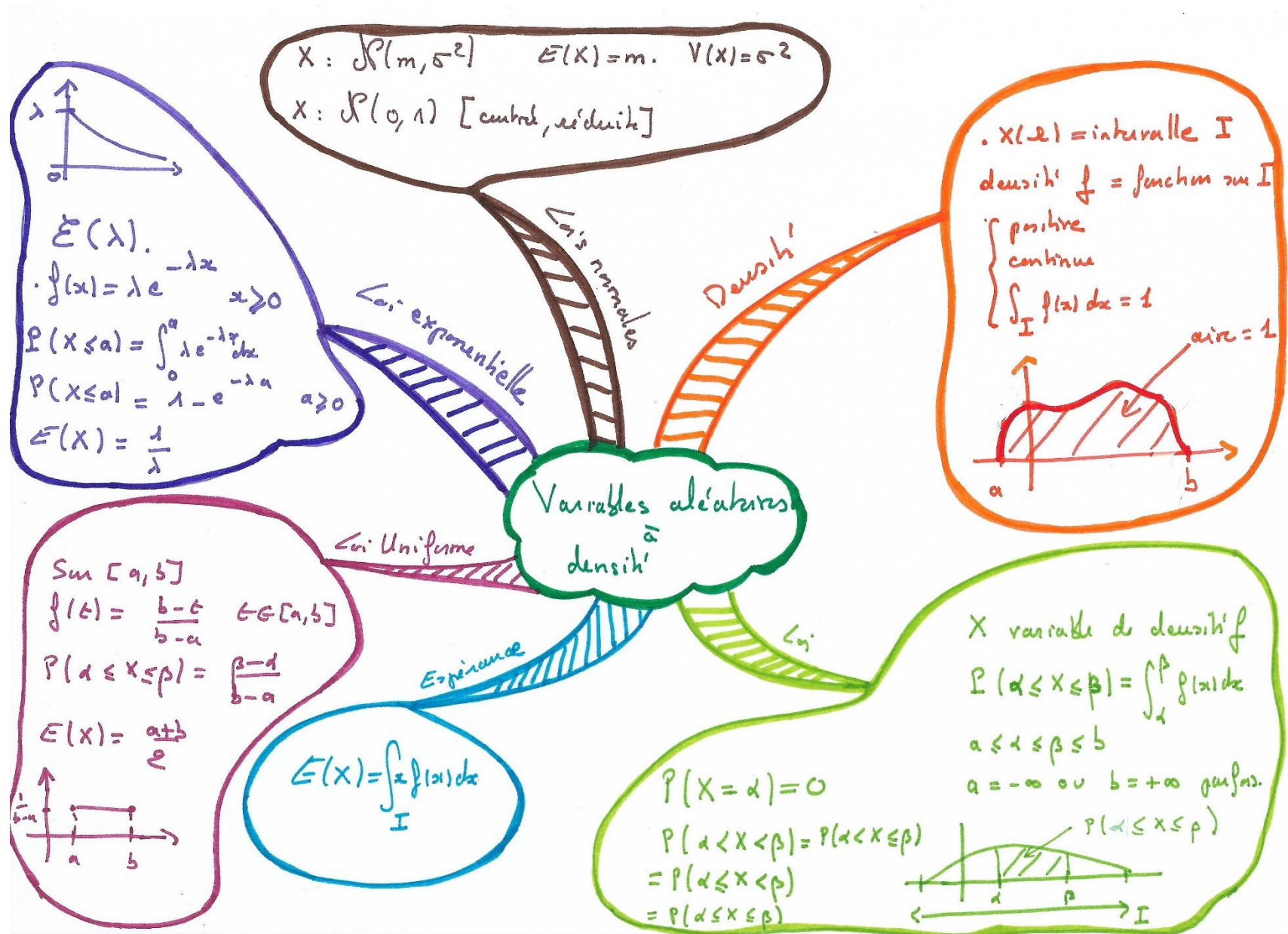
$$X \hookrightarrow B(n, p)$$

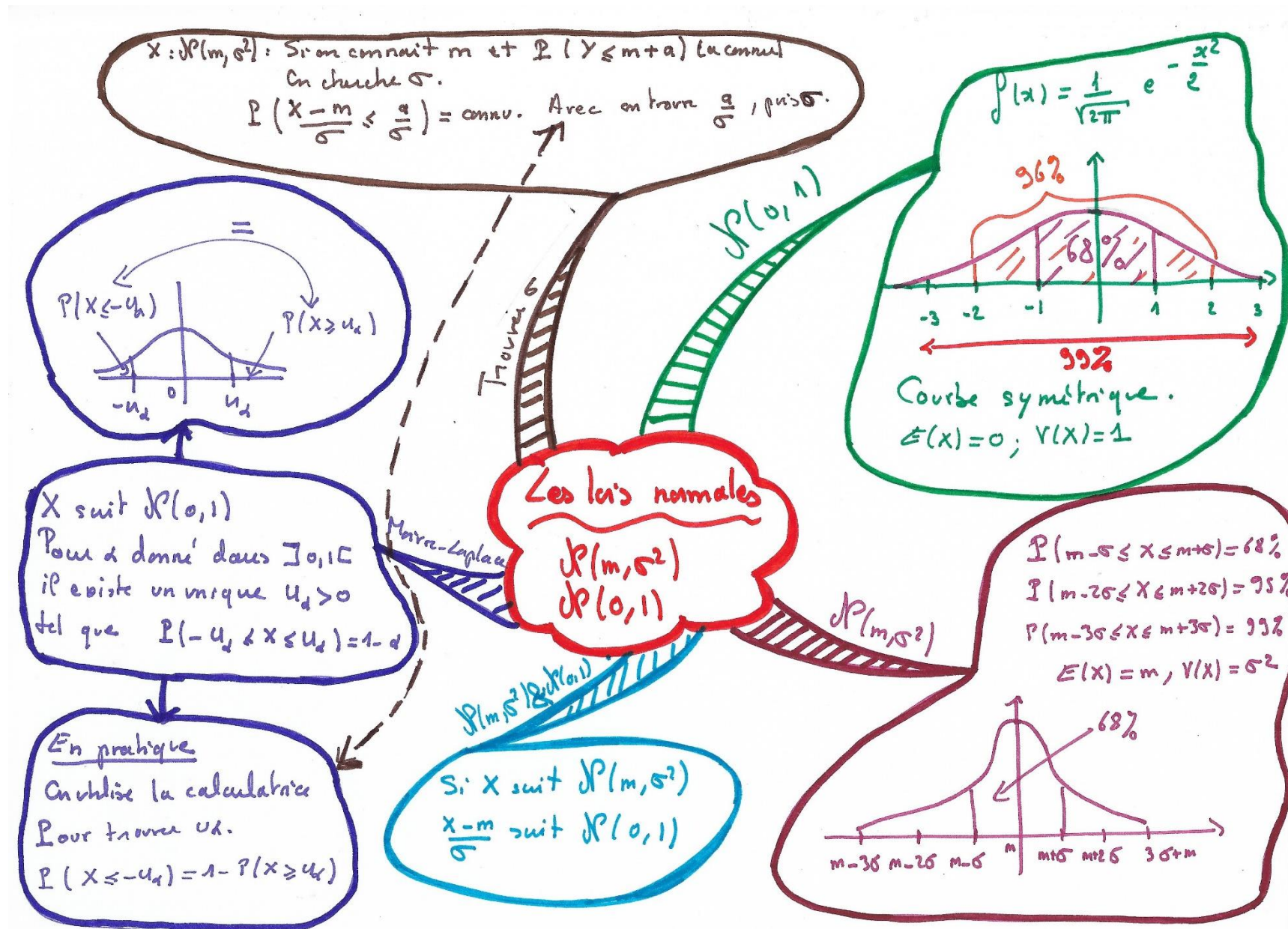
X = nombre de succès.

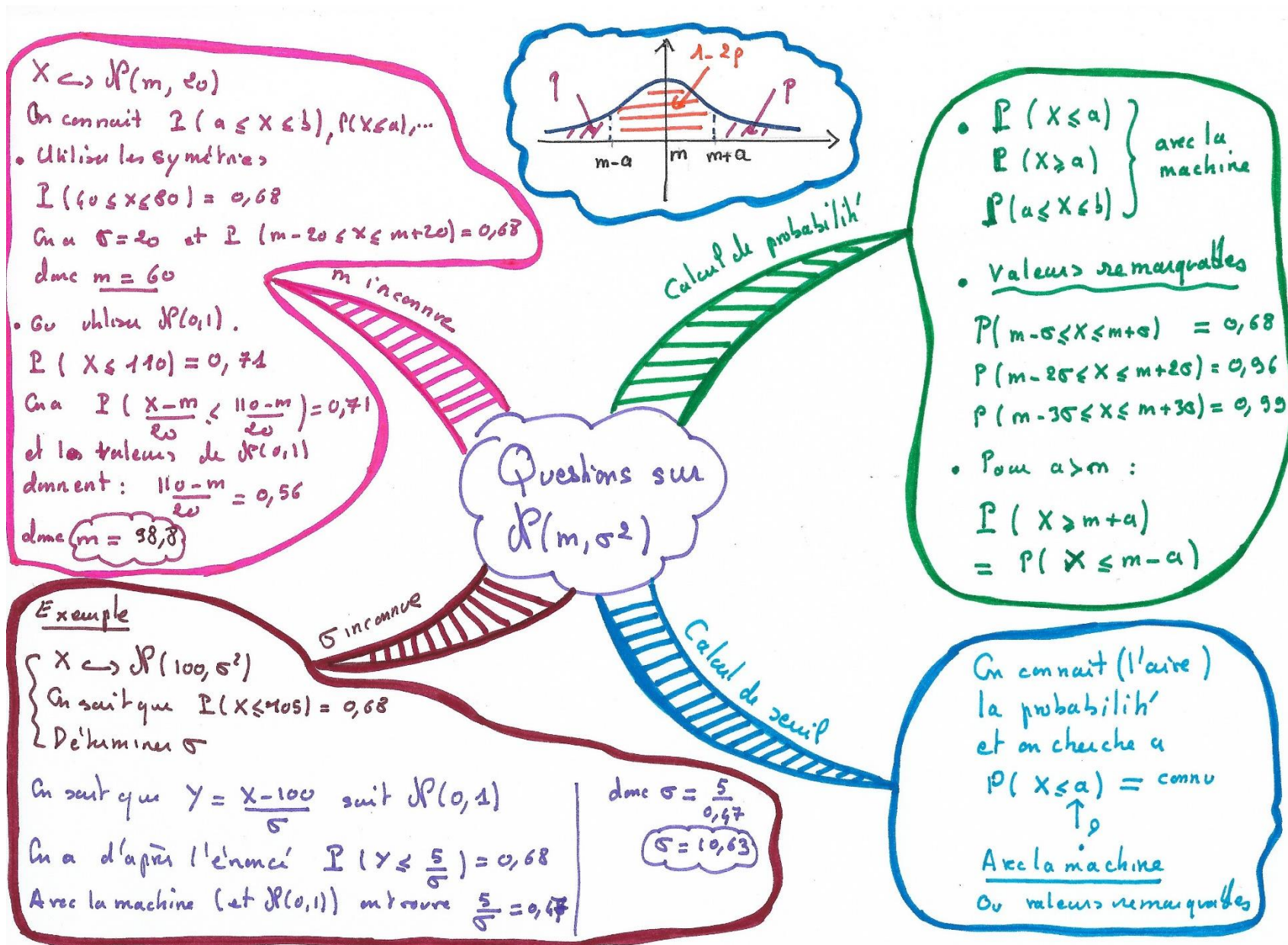
Paramètres de la loi $\left\{ \begin{array}{l} n : \text{nombre de répétitions} \\ p : \text{proba de succès} \end{array} \right.$

⚠ Un "succès" n'a pas de valeur affective !

Exemple : Nombre de "pile" quand on lance 10 fois une pièce.







$$\begin{aligned} n &\geq 30 \\ np &\geq 5 \\ n(1-p) &\geq 5 \end{aligned}$$

Population $\rightarrow$ individu présentant un caractère avec une probabilité : p

Echantillon représentatif ("au hasard") de taille n . Fréquence observée du caractère : f_n

$$\begin{aligned} n &\geq 30 \\ nf_n &\geq 5 \\ n(1-f_n) &\geq 5 \end{aligned}$$

p connu ou donné

Question ?

Est-ce que la valeur de p est correcte ?
[ou, est-ce que l'échantillon est représentatif pour p ?]

Réponse

On détermine I , l'intervalle de fluctuation, qui vérifie : $P(f_n \in I) = 0,95$

$$I = \left[p - 1,96 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} ; p + 1,96 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right]$$

$$f_n \in I$$

OK, on valide

$$f_n \notin I$$

Il y a un problème !

p inconnu

Question Si on choisit f_n comme estimateur de p , comme valeur de p , quel est l'intervalle au fait dans lequel est p , à 95% ? [$\rightarrow$ Sondage]
"Fourchette de valeurs".

Réponse

p est dans $\left[f_n - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f_n + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$ avec une probabilité de 95%.

↑
intervalle de confiance.

On peut aussi choisir

$$\left[f_n - 1,96 \sqrt{\frac{f_n(1-f_n)}{n}} ; f_n + 1,96 \sqrt{\frac{f_n(1-f_n)}{n}} \right]$$

Outils mathématiques

