Agnès Rigny www.mathssansstress.fr

Les cartes mentales ou Mind-Map

Le cerveau et les cartes mentales

Ton cerveau est composé de **deux hémisphères**, reliés entre eux. Les cerveaux droit et gauche. Même si on découvre avec les avancées des neurosciences que cela ne se passe pas aussi caricaturalement que ce que je vais dire**, le cerveau droit et le cerveau gauche** ne servent pas aux mêmes choses. Le cerveau gauche s'occupe des concepts, de la logique et du raisonnement et le cerveau droit de l'intuition et de la créativité. Les cartes mentales font appel aux deux cerveaux et ça c'est parfait pour **booster la mémorisation**. C'est comme les jambes, ça fonctionne mieux avec deux ! En effet dans une carte mentale, les idées sont organisées et reliées entre elles, ordonnées, ce qui fait le bonheur du cerveau gauche, et les couleurs, les dessins, le côté « carte » fait appel à la créativité du cerveau droit.

Le cerveau est composé d'approximativement cent milliards de neurones, et l'information sous forme d'impulsion électrochimique circule d'un neurone à l'autre. Ils fonctionnent en réseau. Tu peux déjà remarquer que la carte mentale reproduit un mini réseau neuronal. C'est une des raisons qui la rendent si **efficace pour l'apprentissage**.

Comment on utilise une carte mentale

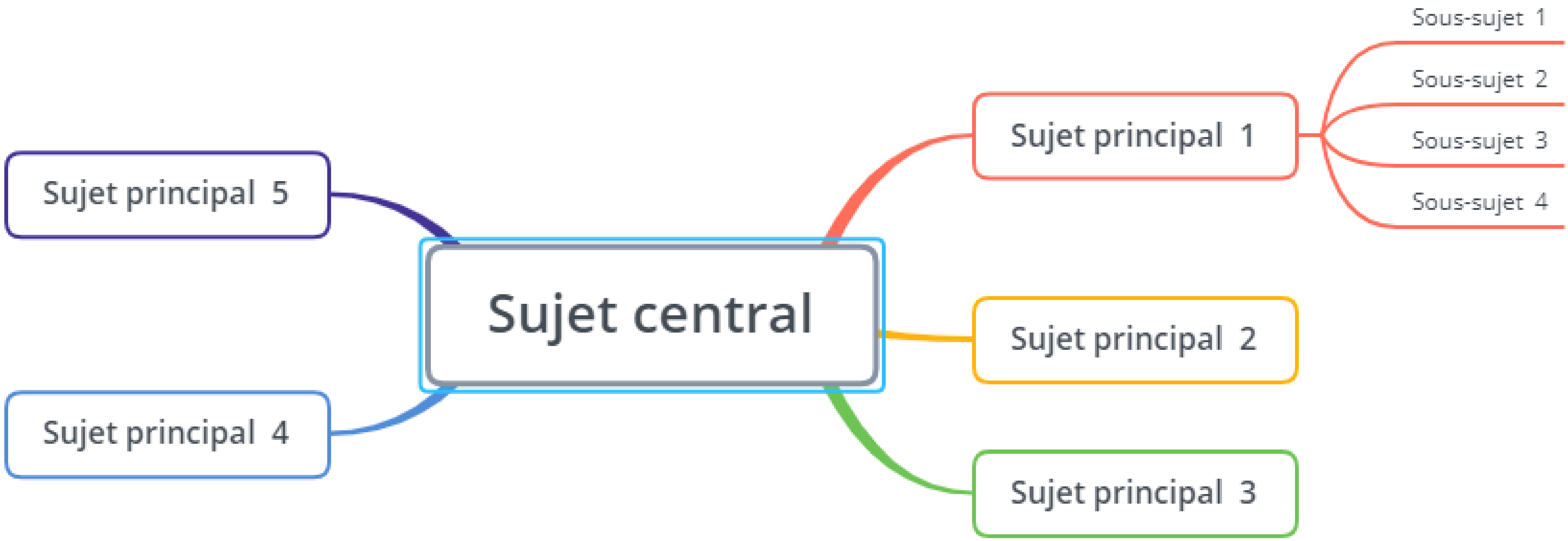
Ce qui est particulièrement intéressant avec une carte mentale, c'est de **la construire**. Car pendant ce temps-là, tu travailles activement, beaucoup plus activement que si tu relis ou recopies ton cours. C'est aussi l'occasion de laisser libre cours à **ta créativité** : il n'y a donc pas « une » bonne façon de faire une carte mentale à toi de te l'approprier et de trouver une façon qui te convienne et soit efficace pour toi. Tu les feras pour toi, donc ce n'est pas nécessaire qu'elles soient compréhensibles par d'autres.

La carte mentale centrée.

Elle est structurée autour d'un thème, qui représente **le noyau central**. De ce noyau partent plusieurs branches, chacune développant un sous-thème, puis de chaque sous-thème des liens vers d'autres. Pour ma part, j'aime bien les lire en commençant en haut à droite, et ensuite dans le sens des aiguilles d'une montre, mais pas d'obligation. On peut également faire des liens entre différentes sous parties. Quand on dessine une carte mentale, on représente concrètement les liens et ça nous aide à **comprendre et à apprendre**.

Agnès Rigny www.mathssansstress.fr

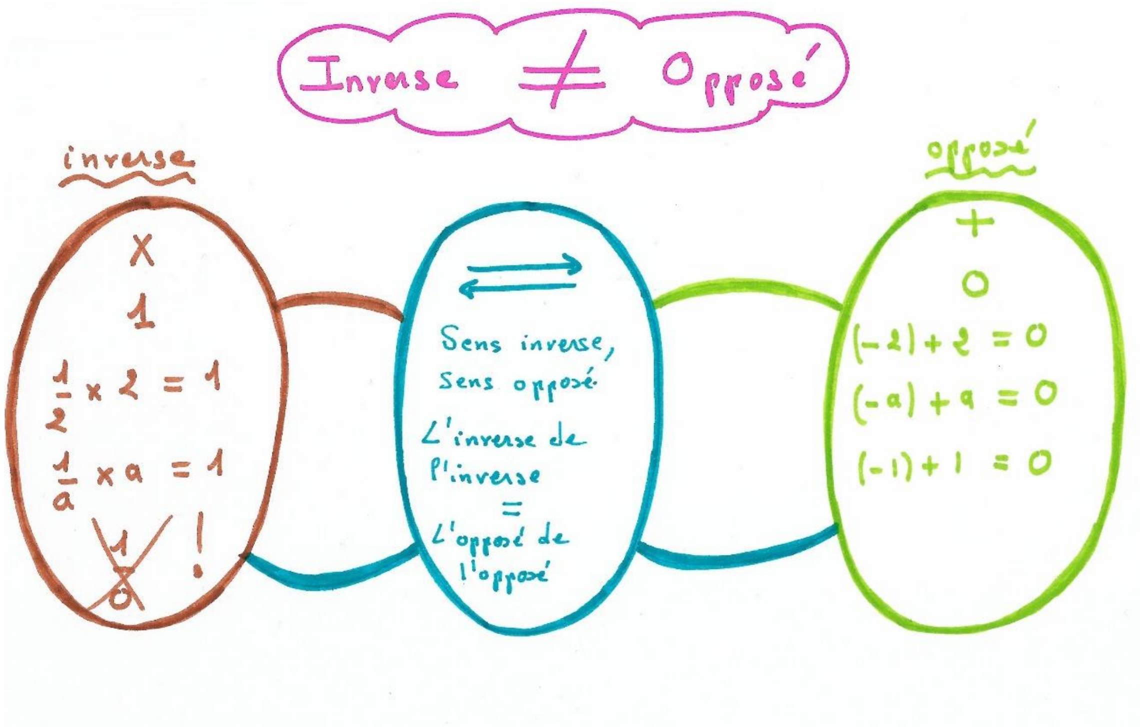
Tout est permis : on peut mettre un symbole à la pace d'un mot, barrer des mots pour exprimer l'idée contraire, faire des schémas, écrire de plusieurs couleurs, ce qui aidera la mémorisation.



Cette carte a été créée avec le logiciel XMind, partiellement gratuit.

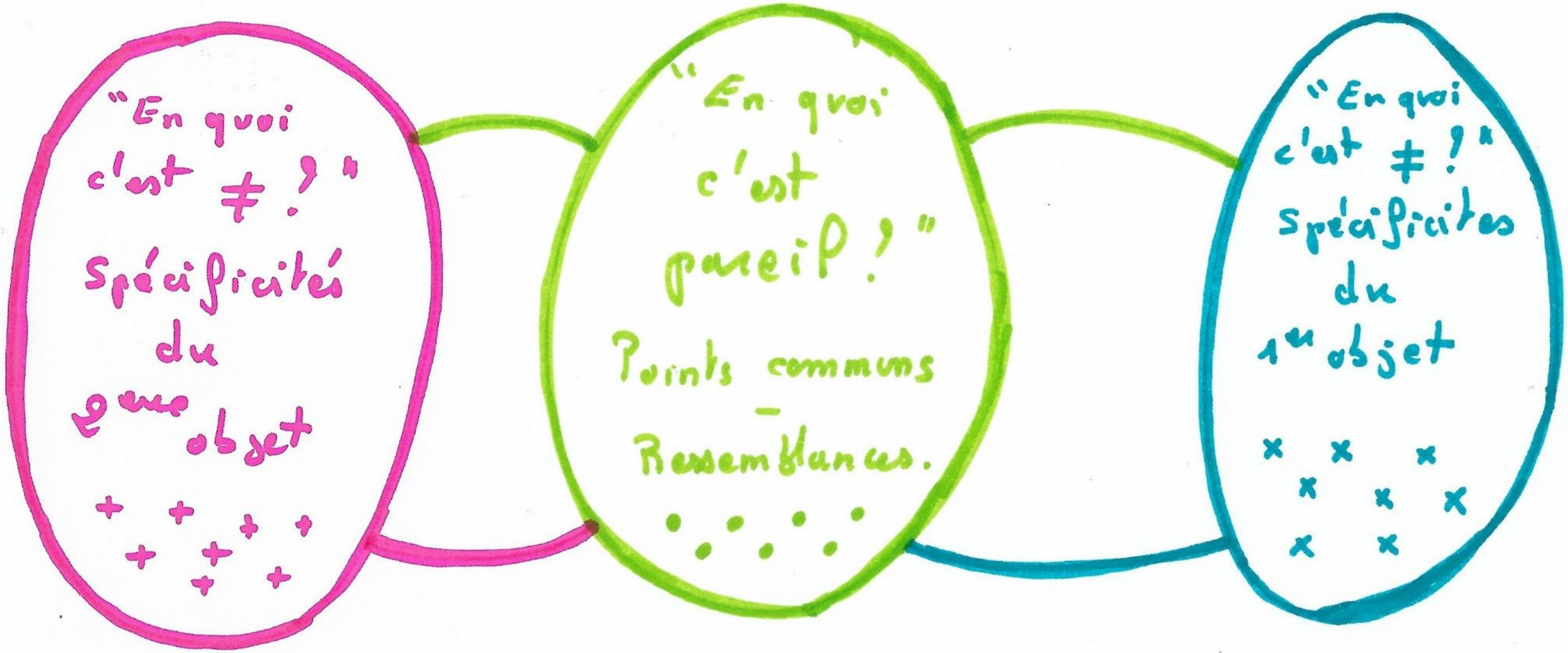
La carte à bulle

C’est un « outil graphique », très pratique quand tu confonds deux notions, ou quand tu veux comparer deux situations.

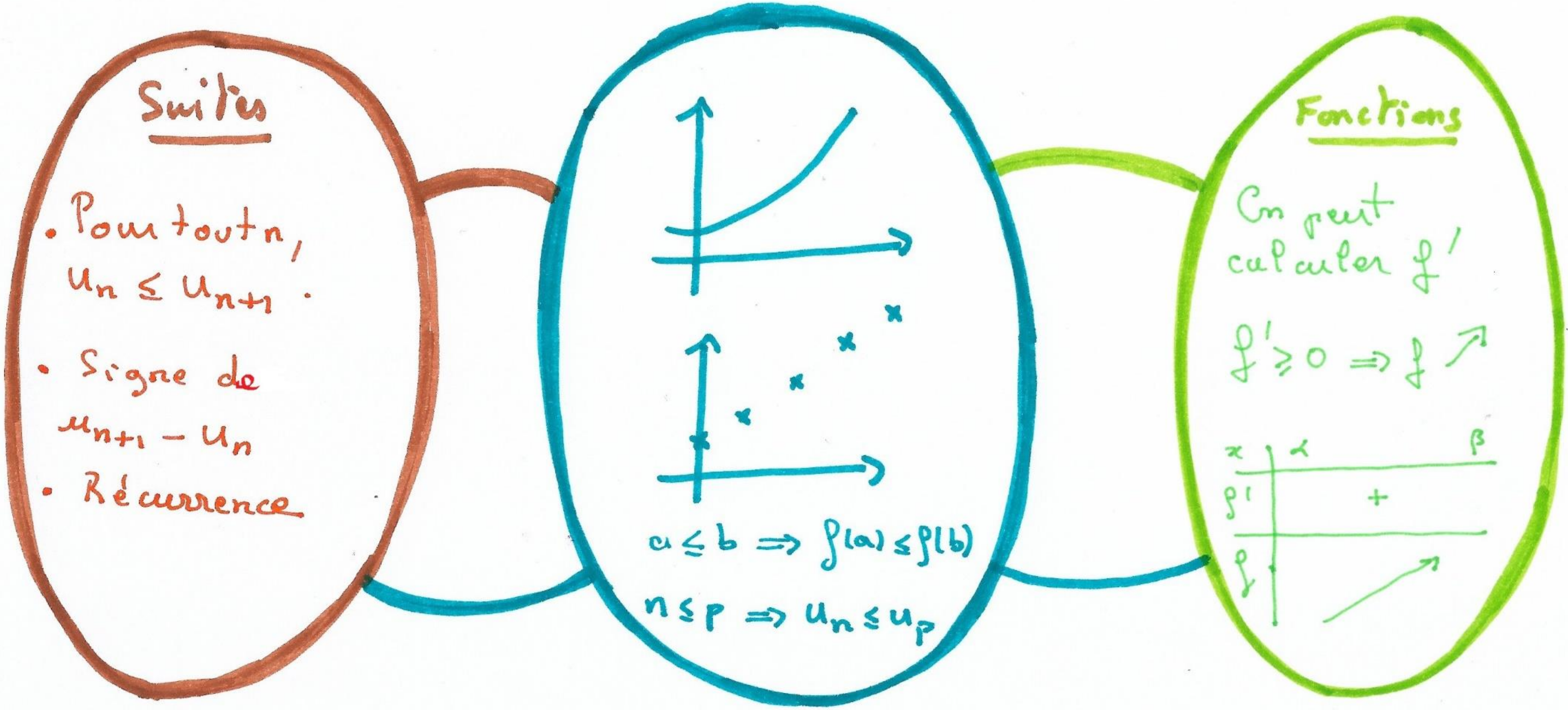


Par exemple, souvent les élèves confondent « inverse » et « opposé ». Quand on confond deux choses, il y a forcément une raison. Si on ne sait pas pourquoi, on n’arrivera pas à s’y retrouver. Dans notre cas, «inverse » et «opposé », en français c’est tout à fait synonyme. « Je vais dans le sens inverse », ou « je vais dans le sens opposé » ça veut dire la même chose. Cela explique la confusion. **Mais en maths, c’est très différent**. L’inverse c’est pour la multiplication et l’opposé c’est pour l’addition. -2 est l’opposé de 2 alors de l’inverse de 2 c’est ½. Mais un point commun c’est que « l’opposé de l’opposé c’est le nombre », et « l’inverse de l’inverse c’est le nombre ». Tout cela c’est beaucoup plus clair sur un schéma. Et le fait de faire le schéma, ça oblige aussi à se poser des questions. **Et se poser des questions, c’est la base de tout apprentissage !**

Pour comparer ou pour choisir



Fonction croissante ou Suite croissante



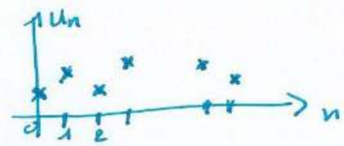

Le cours de maths en Terminale S
Outils
• Factorisation
• Montrer que A = B
• Montrer que A ≤ B
• Le second degré
• Equations de droites dans le plan
Les suites
• Généralités
• Suites arithmétiques et géométriques
• Suites auxiliaires
• Limite d'une suite
• Récurrence
• Algorithmes
Les fonctions
• Dérivées
• Théorème des Valeurs Intermédiaires
• Limites pour les fonctions
• Fonctions usuelles
• Fonction exponentielle
• Fonction logarithme
• $\int_a^b f(t)dt$
• Intégrale et primitive
• Intégrale ≠ primitive
• Etude de fonctions
ℂ
• Nombres complexes
• Géométrie plane et complexes
• Trigonométrie
Géométrie dans l'espace
• Positions relatives de droites et de plans
• Produit scalaire et orthogonalité
• Vecteurs et équations de droites et de plans
Probabilités
• Généralités
• Arbres
• Variables aléatoires discrètes
• Loi binomiale
• Variables aléatoires à densité
• Lois normales
• Questions sur $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$
• Echantillonage

Les suites

Agnès Rigny www.mathssansstress.fr

Suites
généralités
(U_n)

Quoi ?

- $u_0, u_1, u_2, u_3, \dots\dots$
  des nombres qui se $\boxed{\text{suivent}}$
- $n \longmapsto u_n$ (fonction)
- 

- "La suite des décimales de π" :
  (3) 1, 4, 1, 5, 9, 2, 6, 5, 3, ...
  (pas de formule, pas de logique)
- En exercice définie par
  - × Par récurrence
    $u_{n+1} = f(u_n)$
    ex : $u_{n+1} = 3 + u_n$
  - × Explicitement, par une formule explicite
    $u_n = f(n)$
    ex : $u_n = 3n^2 + \sqrt{n}$

Dans les exercices

- Montrer qu'elle est majorée (minorée)
  il existe M tel que pour tout n, $u_n \leq M$
  ($u_n \geq M$)
- majorée + minorée = bornée
- Montrer qu'elle est croissante (décroissante)
  Pour tout n, $u_n \leq u_{n+1}$ ($u_n \geq u_{n+1}$)
- Passer d'une formule de récurrence à une formule explicite
- Trouver la limite quand $n \to +\infty$
- Trouver un seuil :
  ex : n_0 pour que $u_n \geq 10$ pour $n \geq n_0$

Dans la vie

- Suite des températures
- Evolution de la taille d'un enfant, d'une population
- Evolution du capital d'un compte épargne
- Tout phénomène mesuré régulièrement dans le temps.

Suites

- Définies par récurrence
- Forme explicite connue
- Servent de suites auxiliaire pour passer de $u_{n+1} = f(u_n)$ à $u_n = g(n)$

Arithmétiques +

Définition : $u_{n+1} = \underbrace{r}_{\text{la raison}} + u_n$

Propriétés :
$u_n = u_0 + nr$
$u_n = u_1 + (n-1)r$
$u_n = u_p + (n-p)r$

Somme : $1+2+\dots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

$u_0 + u_1 + \dots + u_n = (n+1)u_0 + r\dfrac{n(n+1)}{2}$

$p<n$: $u_p + \dots + u_n = (n-p+1)\dfrac{u_p+u_n}{2}$

Limites :
Si $r>0$ $u_n \to +\infty$
Si $r<0$ $u_n \to -\infty$

Variations
$(u_n) \nearrow \iff r \geq 0$
$(u_n) \searrow \iff r \leq 0$

Géométriques ×

Définition : $u_{n+1} = \underbrace{q}_{\text{la raison}} \times u_n$ $(q \neq 1, \neq 0)$

Propriétés :
- $u_n = q^n u_0$
- $u_n = q^{n-1} u_1$
- $u_n = q^{n-p} u_p$

Somme : $1+q+\dots+q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$

$p<n$: $u_p + \dots + u_n = u_p \times \dfrac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$

Limites :
$q^n \to 0 \iff |q|<1$
$q^n \to +\infty \iff q>1$

Variations : Si $q>0$!
$(q^n) \nearrow \iff q>1$
$(q^n) \searrow \iff 0 \leq q < 1$

Suite auxiliaire

C'est quoi ?

- Une suite définie en fonction d'une autre, qui va servir d'intermédiaire.
- Exemple :

$(u_n) : \begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 3u_n - 2 \end{cases}$

et (v_n) :

$\underbrace{v_n = u_n - 1.}_{\text{la suite auxiliaire}}$

Pourquoi ?

- Trouver u_n en fonction de n, en passant par une suite arithmétique ou géométrique. (En général.)
- On trouve la limite de (u_n) en passant par celle de (v_n) …

Exemple

- $u_0 = 2$, $u_{n+1} = 3u_n - 2$.

$v_n = u_n - 1$.

Montrer que (v_n) est géométrique, en déduire u_n en fonction de n.

① → ② : $v_{n+1} = u_{n+1} - 1$

② → ③ : $v_{n+1} = (3u_n - 2) - 1$

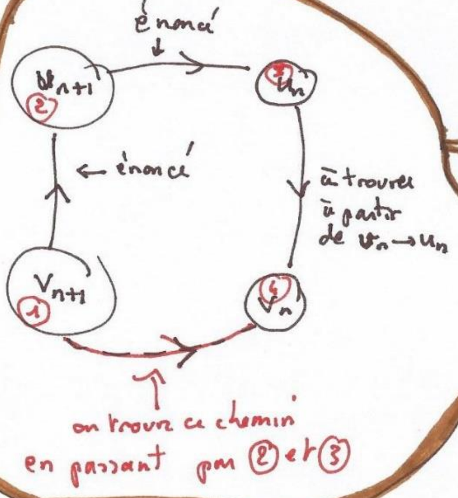
$v_{n+1} = 3u_n - 3$

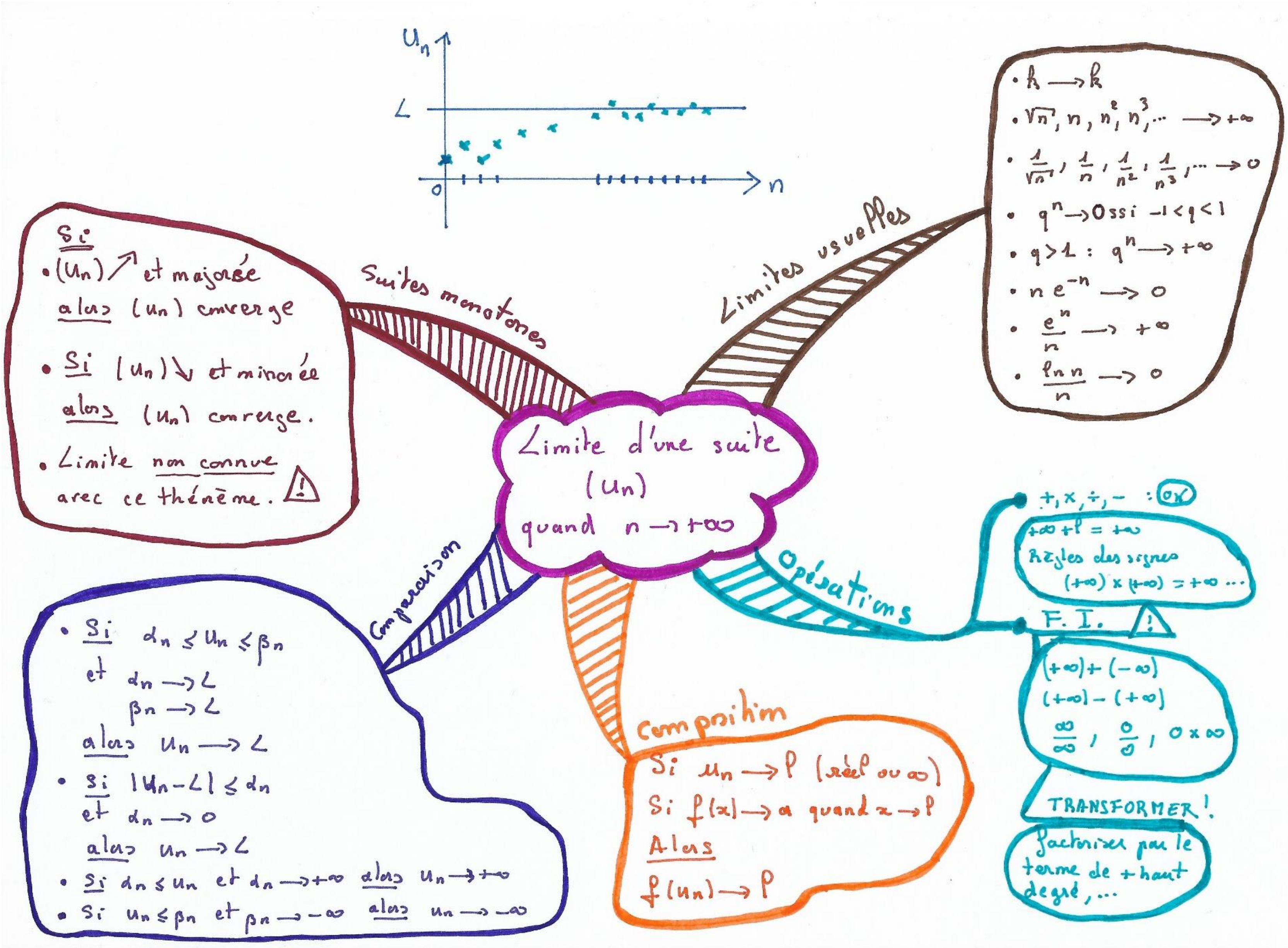
③ → ④ : On a $u_n = v_n + 1$

donc $\underline{v_{n+1}} = 3(v_n + 1) - 3 = \underline{3v_n}$.

D'où $v_n = 3^n v_0$, $\underline{u_n} = 3^n(2-1) + 1 = \underline{3^n + 1}$

Méthode




u_n
L
0
n
Limite d'une suite (u_n) quand $n \to +\infty$
Suites monotones
Si
• $(u_n)\nearrow$ et majorée alors (u_n) converge
• Si $(u_n)\searrow$ et minorée alors (u_n) converge.
• Limite non connue avec ce théorème. ⚠
Limites usuelles
• $k \to k$
• $\sqrt{n}, n, n^2, n^3, \dots \to +\infty$
• $\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}, \frac{1}{n^3}, \dots \to 0$
• $q^n \to 0$ si $-1 < q < 1$
• $q > 1 : q^n \to +\infty$
• $n e^{-n} \to 0$
• $\frac{e^n}{n} \to +\infty$
• $\frac{\ln n}{n} \to 0$
Comparaison
• Si $\alpha_n \leq u_n \leq \beta_n$ et $\alpha_n \to L$, $\beta_n \to L$ alors $u_n \to L$
• Si $|u_n - L| \leq \alpha_n$ et $\alpha_n \to 0$ alors $u_n \to L$
• Si $\alpha_n \leq u_n$ et $\alpha_n \to +\infty$ alors $u_n \to +\infty$
• Si $u_n \leq \beta_n$ et $\beta_n \to -\infty$ alors $u_n \to -\infty$
Composition
Si $u_n \to \ell$ (réel ou ∞)
Si $f(x) \to a$ quand $x \to \ell$
Alors $f(u_n) \to \ell$
Opérations
$+, \times, \div, -$: OK
$+\infty + \ell = +\infty$
Règles des signes
$(+\infty) \times (+\infty) = +\infty \dots$
F. I. ⚠
$(+\infty) + (-\infty)$
$(+\infty) - (+\infty)$
$\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, $0 \times \infty$
TRANSFORMER !
factoriser par le terme de + haut degré, ...

Récurrence

C'est quoi ?

- C'est une méthode pour démontrer une propriété qui dépend de n, pour tout $n \geqslant k$. $P(n)$
- Exemples :
  - Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, $u_n \leqslant u_{n+1}$.
  - Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, $1+2+\dots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$
- Formule de récurrence !

1 Etape 1 — Initialisation

Il faut montrer que la propriété $P(k)$ est vraie

exemple : $1 = \dfrac{1 \times (1+1)}{2}$

2 Etape 2 — Hérédité

On fixe un entier n quelconque.
On suppose que $P(n)$ est vraie.
(c'est l'hypothèse de récurrence)
Il faut montrer que $P(n+1)$ est vraie.

Il faut avoir le réflexe d'utiliser la relation de récurrence

exemple Soit n fixé quelconque $\geqslant 0$.
On suppose $1+2+\dots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$
(hypothèse de récurrence).

Alors

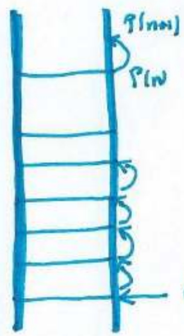
$$(1+2+\dots+n)+(n+1) \overset{\text{on utilise l'hyp. de rec.}}{=} \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)+n+1$$

$$= \frac{n+1}{2}(n+2)$$

3 Etape 3 — Conclusion. (c'est formel, mais il faut l'écrire)

" La propriété est initialisée et héréditaire, donc elle est vraie pour tout $n \geqslant k$.

Principe

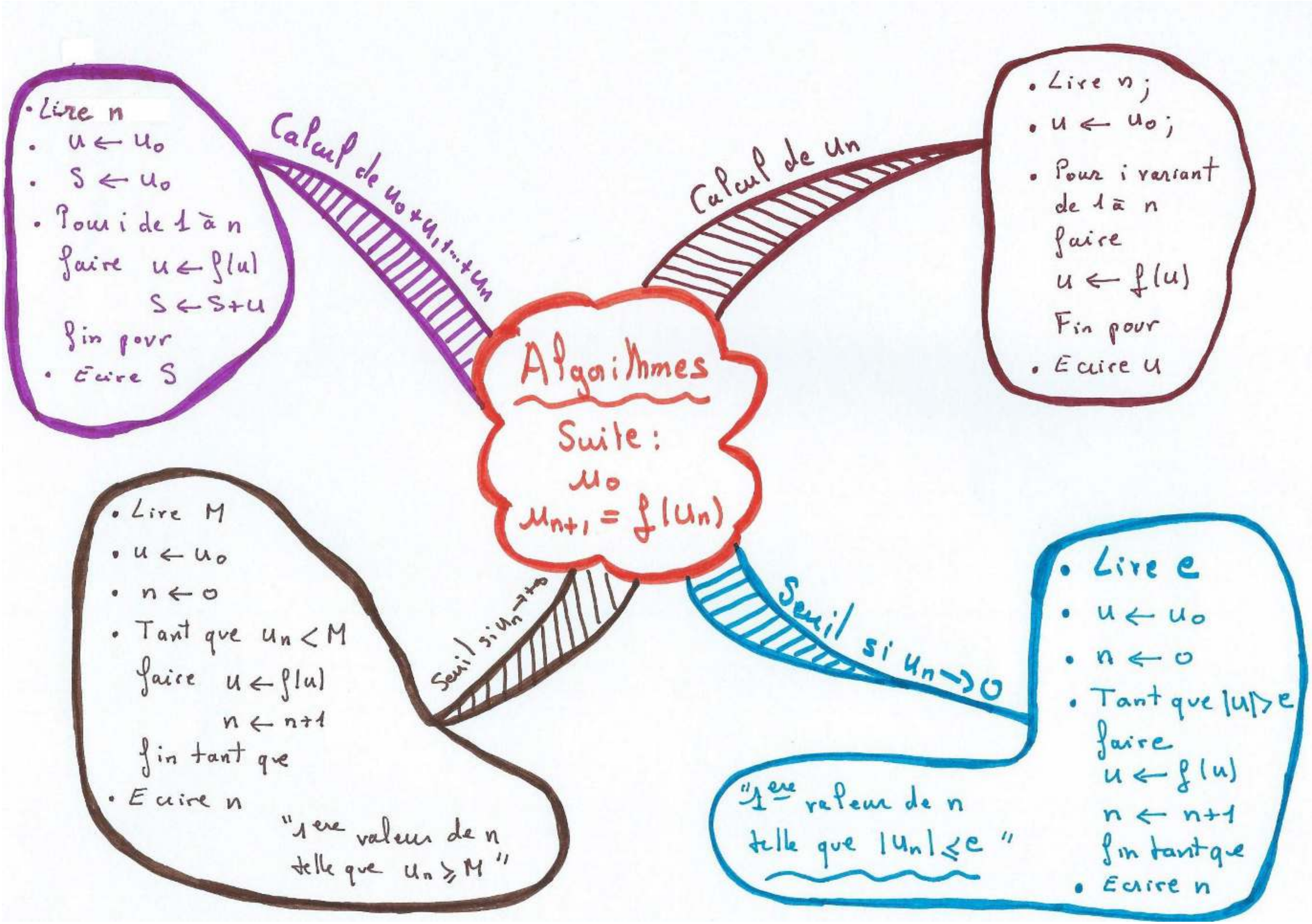


- Si on a $P(n)$ vraie
- Si $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ vraie 2

Alors $P(n+1)$ est vraie

départ $P(k)$ vraie 1

Alors c'est vrai pour tout entier 3


Algorithmes
Suite : u_0 ; $u_{n+1} = f(u_n)$
Calcul de $u_0 + u_1 + \dots + u_n$
• Lire n
• $u \leftarrow u_0$
• $S \leftarrow u_0$
• Pour i de 1 à n faire $u \leftarrow f(u)$
$S \leftarrow S + u$
fin pour
• Ecrire S
Calcul de u_n
• Lire n ;
• $u \leftarrow u_0$;
• Pour i variant de 1 à n faire
$u \leftarrow f(u)$
Fin pour
• Ecrire u
Seuil si $u_n \to +\infty$
• Lire M
• $u \leftarrow u_0$
• $n \leftarrow 0$
• Tant que $u_n < M$ faire $u \leftarrow f(u)$
$n \leftarrow n+1$
fin tant que
• Ecrire n
"1ère valeur de n telle que $u_n \geq M$"
Seuil si $u_n \to 0$
• Lire e
• $u \leftarrow u_0$
• $n \leftarrow 0$
• Tant que $|u| > e$ faire
$u \leftarrow f(u)$
$n \leftarrow n+1$
fin tant que
• Ecrire n
"1ère valeur de n telle que $|u_n| \leq e$"

Les fonctions

Dérivées

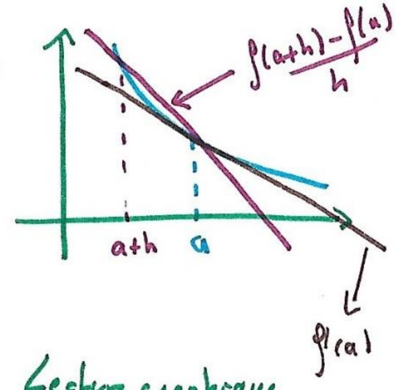
Revoir les équations de droites

Sert à

- Etudier des fonctions
- Trouver des max, min.
- Préciser la courbe (tangente)
- Valeur approchée de $f(a+h)-f(a) \simeq f'(a).h$

Quoi ?

- $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$



Lecture graphique

- La tangente en a :

$y = f'(a)(x-a) + f(a)$

Droite passant par $(a, f(a))$
coefficient directeur : $f'(a)$

Tableau de variation

$f' \geq 0 \Rightarrow f \nearrow$

$f' \leq 0 \Rightarrow f \searrow$

On s'intéresse au signe de $f'(x) \rightarrow$ factoriser !

max ou min $\rightarrow f'(a)=0$ ou au bord.

x					
$f'(x)$	+	0	−	0	+
f	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

Fonction f'

- $x \rightarrow f'(x)$
- Dérivées usuelles

$(x^n)' = nx^{n-1}$	$(u^n)' = u'nu^{n-1}$
$(e^x)' = e^x$	$(e^u)' = u'e^u$
$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$
$(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos(u))' = -u'\sin(u)$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin(u))' = u'\cos(u)$

- Opérations

$(ku)' = ku'$

$(u+v)' = u'+v'$

$(uv)' = u'v+v'u$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v-v'u}{v^2}$

$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$

$(f(ax+b))' = af'(ax+b)$

Théorème des Valeurs Intermédiaires

Rédaction

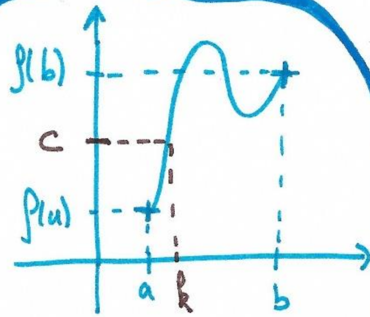
Avec un tableau de variation.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	<0	α	>0

- f est continue sur $]-\infty;+\infty[$
- $0 \in]\lim_{-\infty} f, \lim_{+\infty} f[$
- f est strictement croissante.

Donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique α tel que $f(\alpha)=0$.

Quoi ?



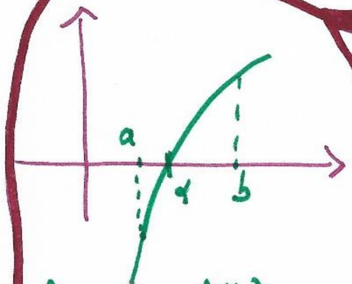
- c est une valeur intermédiaire entre $f(a)$ et $f(b)$
- f est continue (dérivable ou)

Alors il existe k entre a et b tel que $f(k)=c$

Corollaire ⚠

Si f est en plus strictement monotone, alors k est unique

Encadrement



$f(a) < 0 < f(b)$

$f \nearrow$ strict

$\exists!\ \alpha$ tel que $f(\alpha)=0$.

$a<\alpha<b$.

Faire une table de valeurs pour encadrer α.

Pour quoi ?

Pour répondre aux questions sur

- le nombre de solutions d'une équation du type $f(x)=c$
- Montrer qu'il existe α tel que $f(\alpha)=c$
- Montrer qu'il existe un unique α tel que ...

Agnès Rigny www.mathssansstress.fr

Limite pour les fonctions

Inégalités

- Si $f(x) \le g(x) \le h(x)$ pour $x \in I$ intervalle
- si $f(x) \to \ell$ quand $x \to a$ et $h(x) \to \ell$ quand $x \to a$

<u>Alors</u> $g(x) \to \ell$ quand $x \to a$

- Si $f(x) \le g(x)$ pour $x \in I$
- Si $f(x) \to +\infty$ quand $x \to a$

<u>alors</u> $g(x) \to +\infty$

...

Opérations

Comme pour les suites

$+ ; \times ; \div$ FI, ...

Quoi ?

Définitions

- $f(x) \to \ell$ quand $x \to \mp\infty$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists M \lessgtr 0$, si $x > M$ alors $|f(x) - \ell| < \varepsilon$

- $f(x) \to \ell$ quand $x \to a$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \alpha > 0$, si $|x - a| < \alpha$ alors $|f(x) - \ell| < \varepsilon$

- $f(x) \to \mp\infty$ quand $x \to +\infty$

$\left.\begin{array}{l}\forall M > 0 \\ \forall M < 0\end{array}\right\}$, $\exists A > 0$, si $x > A$ alors $\left\{\begin{array}{l}f(x) > M \\ f(x) < M\end{array}\right.$

- $f(x) \to \mp\infty$ quand $x \to -\infty$

$\left\{\begin{array}{l}\forall M > 0 \\ \forall M < 0\end{array}\right.$, $\exists A < 0$, si $x < A$ alors $\left\{\begin{array}{l}f(x) > M \\ f(x) < M\end{array}\right.$

- $f(x) \to \mp\infty$ quand $x \to a$

$\left\{\begin{array}{l}\forall M > 0 \\ \forall M < 0\end{array}\right.$, $\exists \alpha > 0$, si $|x - a| < \alpha$ alors $\left\{\begin{array}{l}f(x) > M \\ f(x) < M\end{array}\right.$

Fonction composée

$\lim\limits_{x \to a} f(u(x)) = \ell$

si $X = u(x) \to b$ quand $x \to a$

et $f(X) \to \ell$ quand $X \to b$

<u>exemple</u>

$$\lim_{x \to +\infty} e^{x^2+1} = +\infty$$

car, $X = x^2 + 1$:

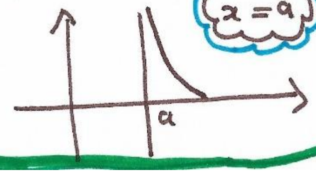
$$\lim_{x \to +\infty} X = +\infty$$

$$\lim_{X \to +\infty} e^X = +\infty$$

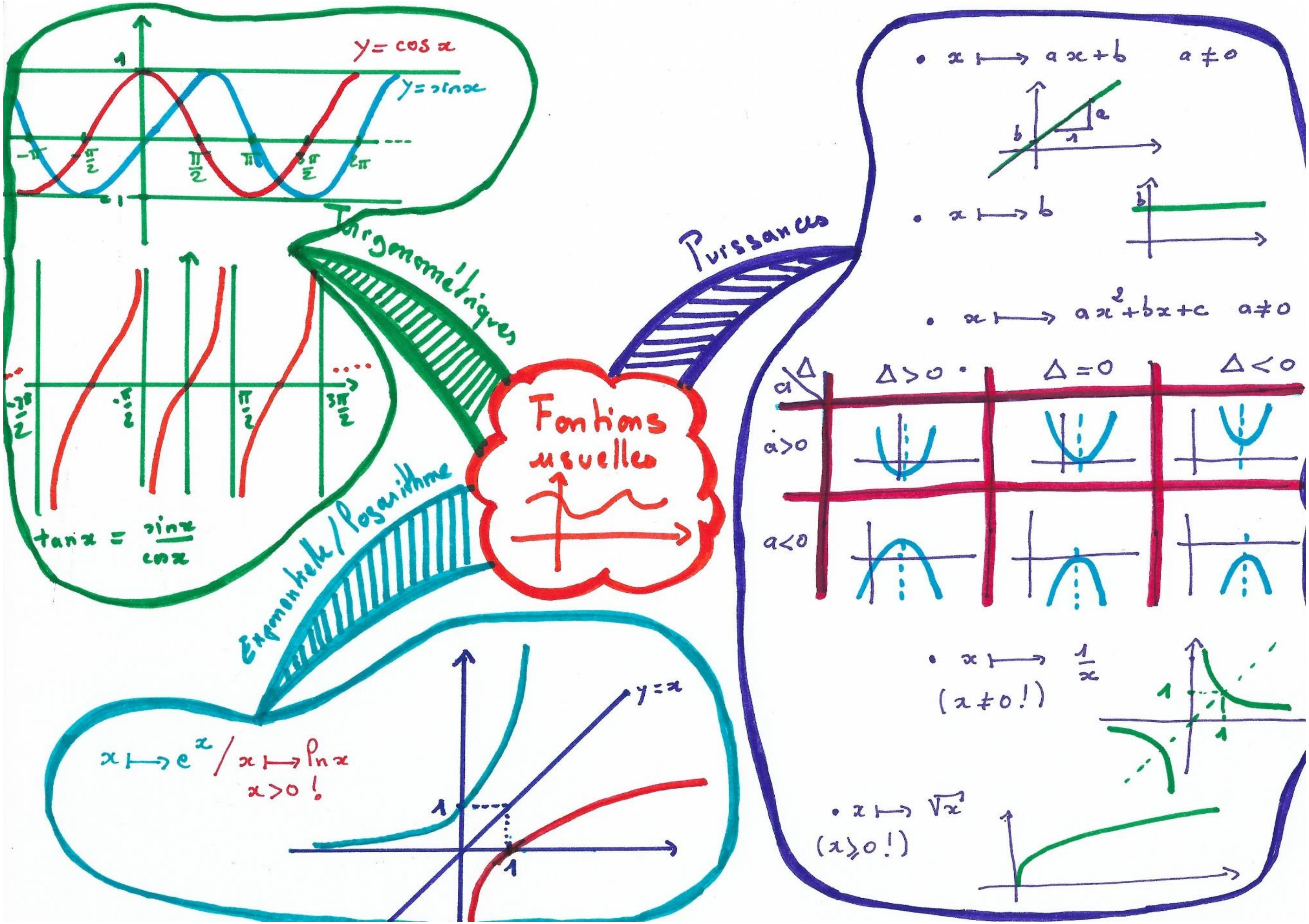
Asymptotes

- 

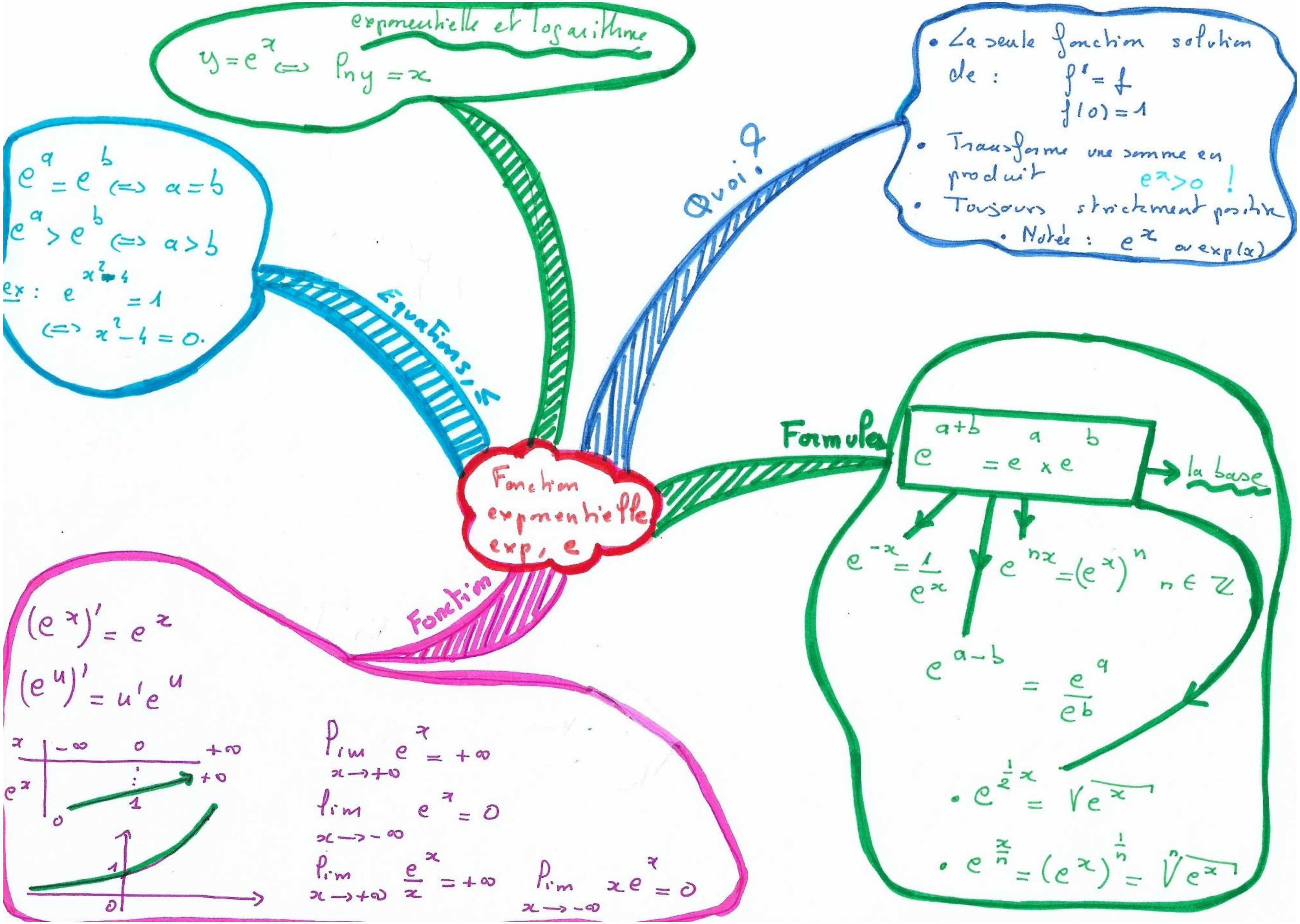
$y = \ell$ en $\pm\infty$

- 

$x = a$


Fonctions usuelles
Trigonométriques
y = cos x
y = sin x
1
-1
-π
-π/2
π/2
π
3π/2
2π
-3π/2
3π/2
tan x = sin x / cos x
Exponentielle / Logarithme
x ⟼ e^x / x ⟼ ln x
x > 0 !
y = x
1
Puissances
• x ⟼ ax + b   a ≠ 0
b
a
1
• x ⟼ b
b
• x ⟼ ax² + bx + c   a ≠ 0
a \ Δ
Δ > 0
Δ = 0
Δ < 0
a > 0
a < 0
• x ⟼ 1/x
(x ≠ 0 !)
1
1
• x ⟼ √x
(x ≥ 0 !)

Agnès Rigny www.mathssansstress.fr



Agnès Rigny www.mathssansstress.fr

Fonction $\ln$

{Logarithme
{Népérien

Equations / Inéquations

- **Equations**

$$\begin{cases} e^x = a \iff x = \ln a & a>0 \\ \ln x = a \iff x = e^a & \\ \ln(a) = \ln(b) \iff a = b & a,b>0 \end{cases}$$

- **Inéquations**

$e^x \geq a \iff x \geq \ln(a) \quad (a>0)$

$\ln x \geq a \iff x \geq e^a$

$2^n \geq a \iff n \geq \ln(a)$ (seuils)

Formules

$a, b > 0$!

$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$

$\ln(1) = 0$

$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$

$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$

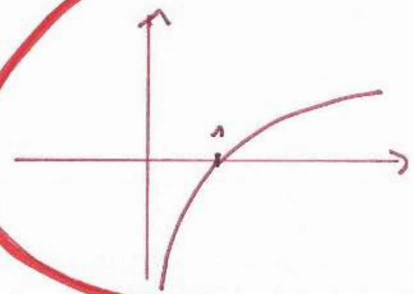
$\ln(a^n) = n\ln(a) \quad n \in \mathbb{Z}$

Fonction

$\ln'(x) = \frac{1}{x}$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

x	0		1		$+\infty$
$\ln$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$



$\lim\limits_{x \to 0^+} x\ln(x) = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$

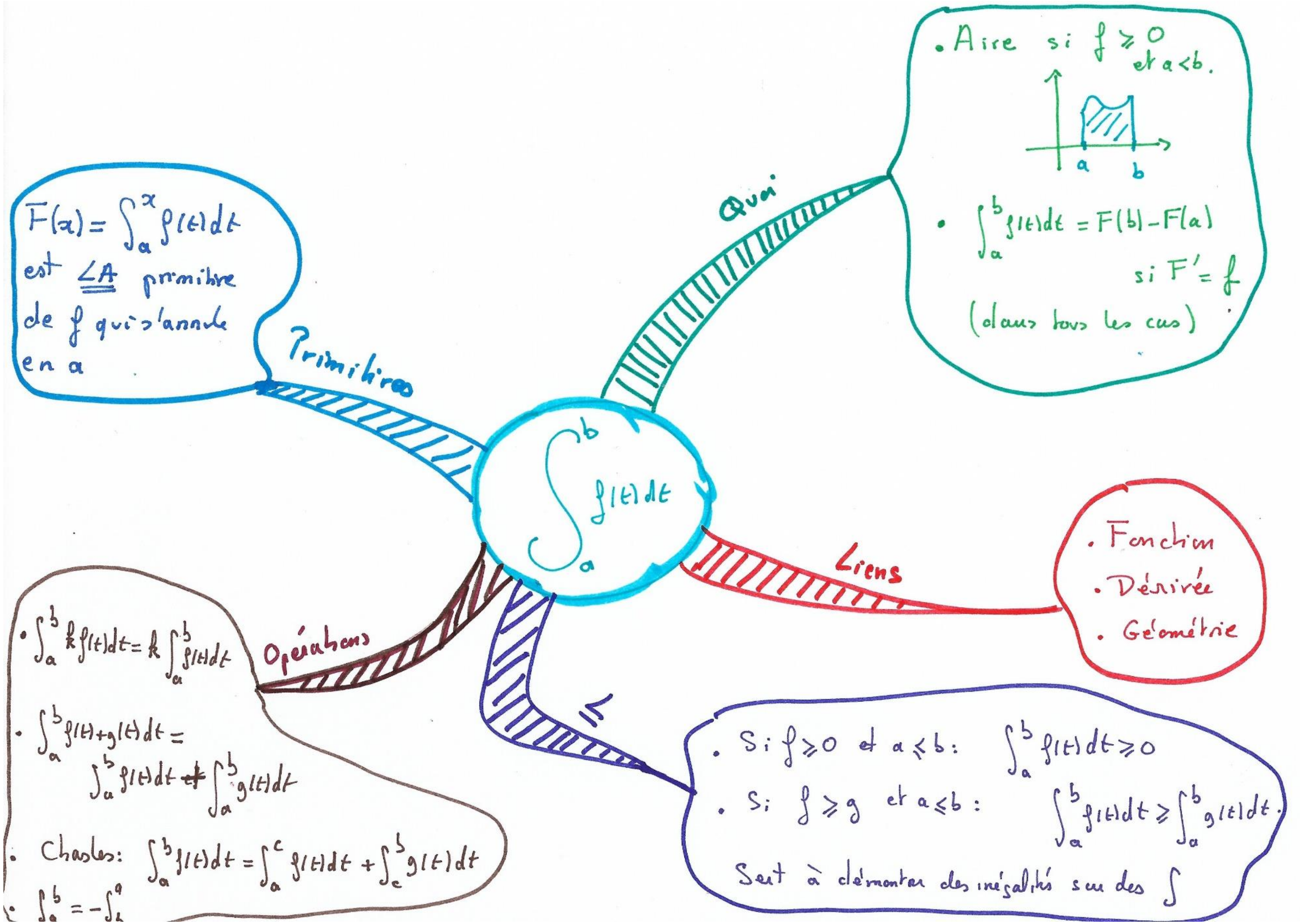
Avec e^x

$$\begin{cases} e^{\ln(x)} = x & x>0 \\ \ln(e^y) = y & y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

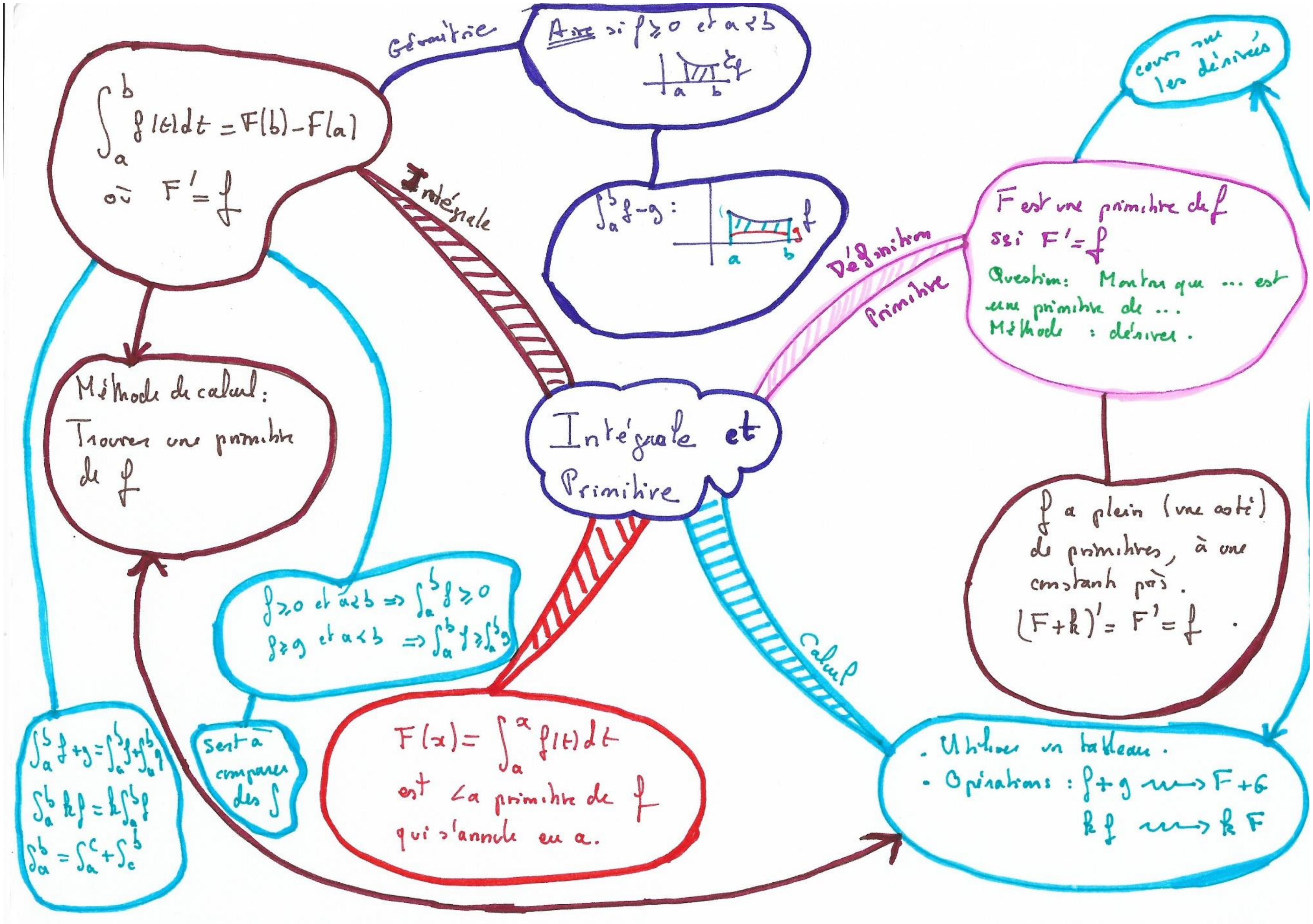
- $a = e^b \iff \ln a = b$

$a>0, \; b \in \mathbb{R}$

- $\ln(1) = 0, \; \ln(e) = 1$



$\int_a^b f(t)\,dt$
Primitives
$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ est LA primitive de f qui s'annule en a
Aire
• Aire si $f \geq 0$ et $a<b$.
a
b
• $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$ si $F' = f$ (dans tous les cas)
Liens
• Fonction
• Dérivée
• Géométrie
Opérations
• $\int_a^b k f(t)\,dt = k \int_a^b f(t)\,dt$
• $\int_a^b f(t)+g(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt$
• Chasles: $\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b g(t)\,dt$
• $\int_a^b = -\int_b^a$
$\leq$
• Si $f \geq 0$ et $a \leq b$: $\int_a^b f(t)\,dt \geq 0$
• Si $f \geq g$ et $a \leq b$: $\int_a^b f(t)\,dt \geq \int_a^b g(t)\,dt$
Sert à démontrer des inégalités sur des $\int$



Intégrale et Primitive
Géométrie
Aire si $f \geq 0$ et $a<b$
a
b
$\int_a^b f-g$:
Intégrale
$\int_a^b f(t)dt = F(b)-F(a)$
où $F'=f$
Méthode de calcul : Trouver une primitive de f
$f \geq 0$ et $a<b \Rightarrow \int_a^b f \geq 0$
$f \geq g$ et $a<b \Rightarrow \int_a^b f \geq \int_a^b g$
Sert à comparer des $\int$
$\int_a^b f+g = \int_a^b f + \int_a^b g$
$\int_a^b kf = k\int_a^b f$
$\int_a^b = \int_a^c + \int_c^b$
$F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est la primitive de f qui s'annule en a.
Définition Primitive
F est une primitive de f ssi $F'=f$
Question : Montrer que ... est une primitive de ...
Méthode : dériver.
cours sur les dérivées
f a plein (une infinité) de primitives, à une constante près.
$(F+k)' = F' = f$.
Calcul
. Utiliser un tableau.
. Opérations : $f+g \rightsquigarrow F+G$
$kf \rightsquigarrow kF$

Intégrale $\neq$ Primitive

Intégrale

$\int_a^b f(t)\,dt$ c'est un NOMBRE.

~~Dériver une intégrale~~

Points communs

- $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$ où $F' = f$
- $x \longmapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est LA primitive de f qui s'annule en a

Primitive

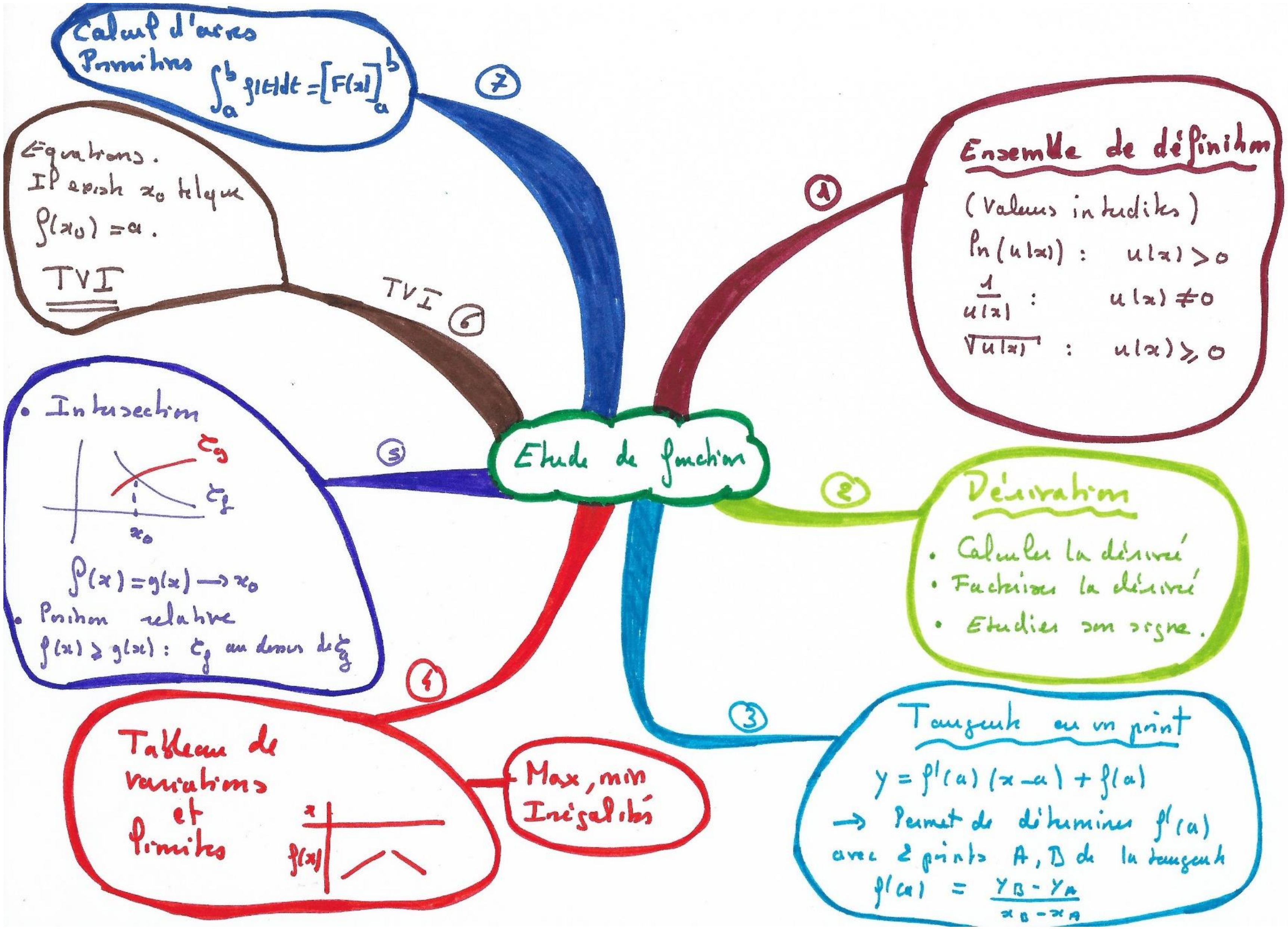
Une primitive c'est une FONCTION.

f a une infinité de primitives.

$F' = f$

$(F+k)' = f$ pour tout k

Agnès Rigny www.mathssansstress.fr

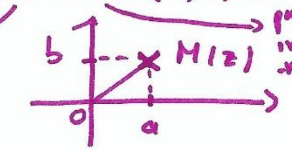


Les nombres complexes et la trigonométrie

Nombres Complexes. ℂ

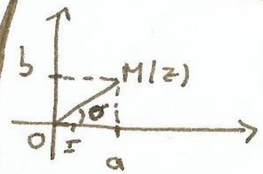
C'est quoi ?

- $z = a + ib$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ — partie réelle, partie imaginaire



- $i^2 = -1$ ⚠
- Calculs analogues à $\mathbb{R}$
- $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
- $\bar{z} = a - ib$ $\quad |z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2+b^2} = OM$
- $z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z}$
- $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \dfrac{a}{a^2+b^2} - i\dfrac{b}{a^2+b^2}$

Formes trigo/exp.



$z = a + ib$ ×

$\rho = OM \quad \theta = (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$

$\rho = \sqrt{a^2+b^2} = |z|$

$a = \rho\cos\theta$, $b = \rho\sin\theta$

$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ ×

$z = \rho e^{i\theta}$ ×

↳ calculs comme dans $\mathbb{R}$

$e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$ ....

Géométrie

$z = a + ib \to M(a,b)$

$|z| = OM$

$AB = |z_B - z_A|$

$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)$

Lieux :

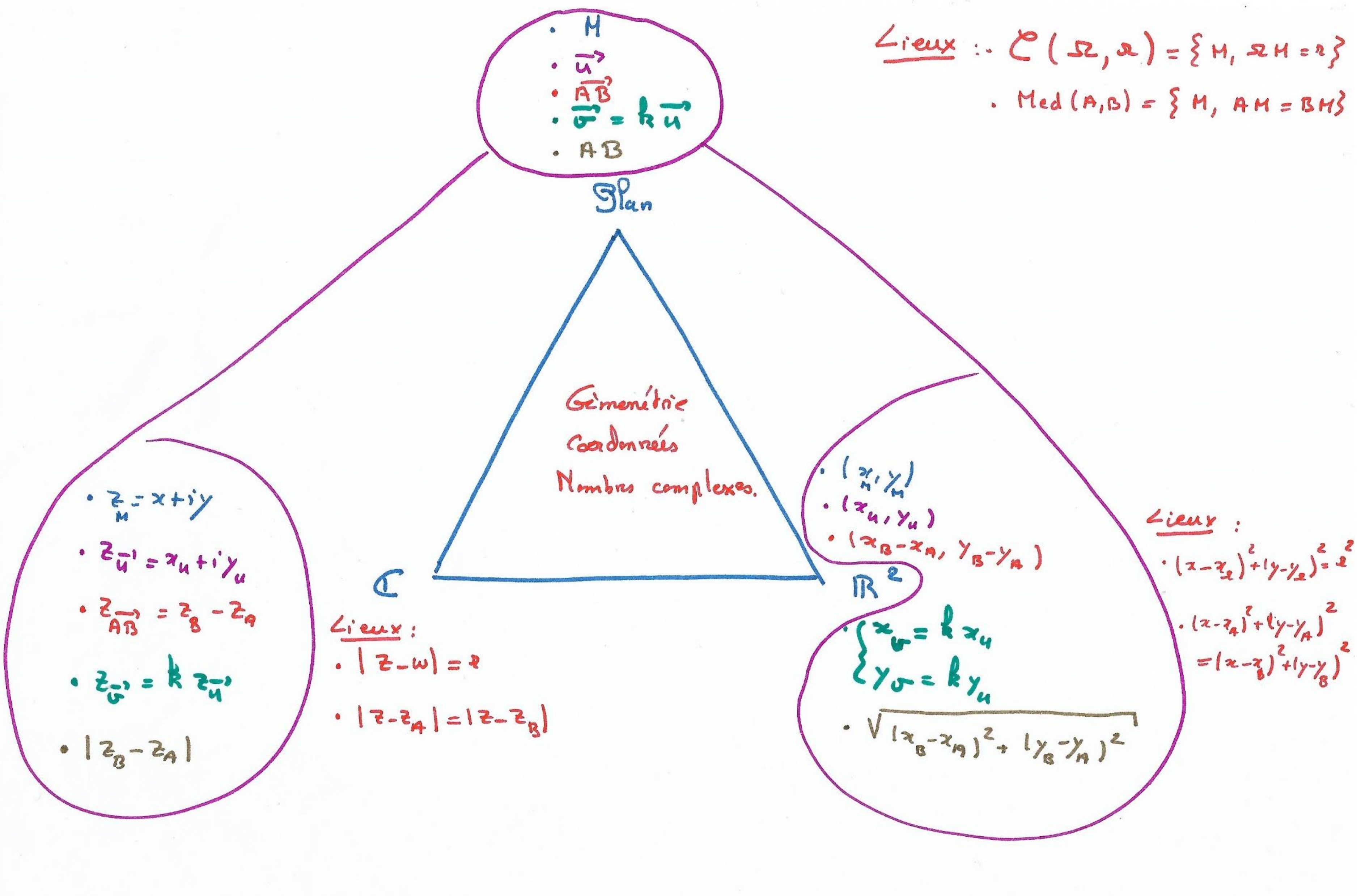
$|z - w| = r$: Cercle

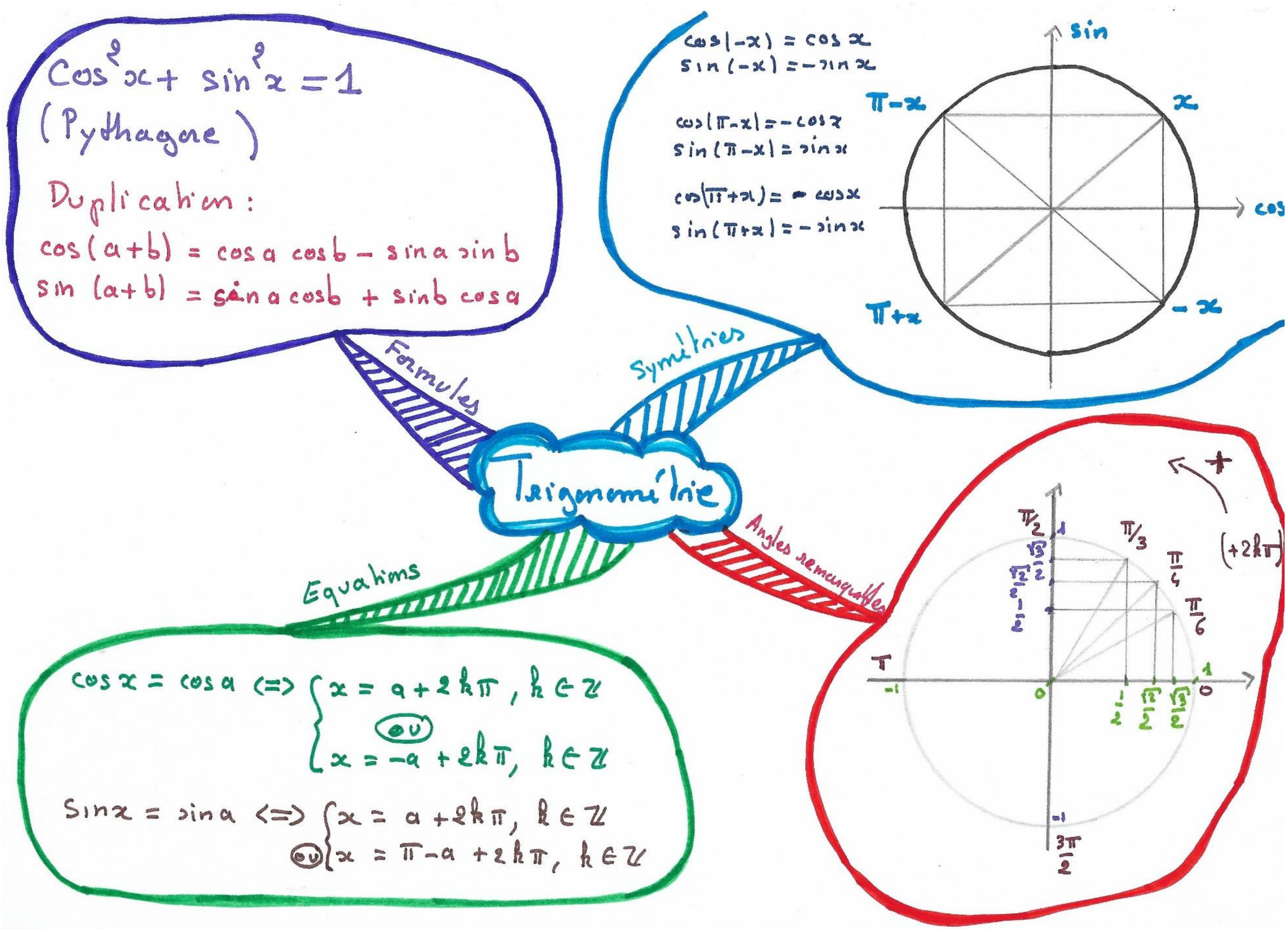
$|z - \alpha| = |z - \beta|$: médiatrice

Equations

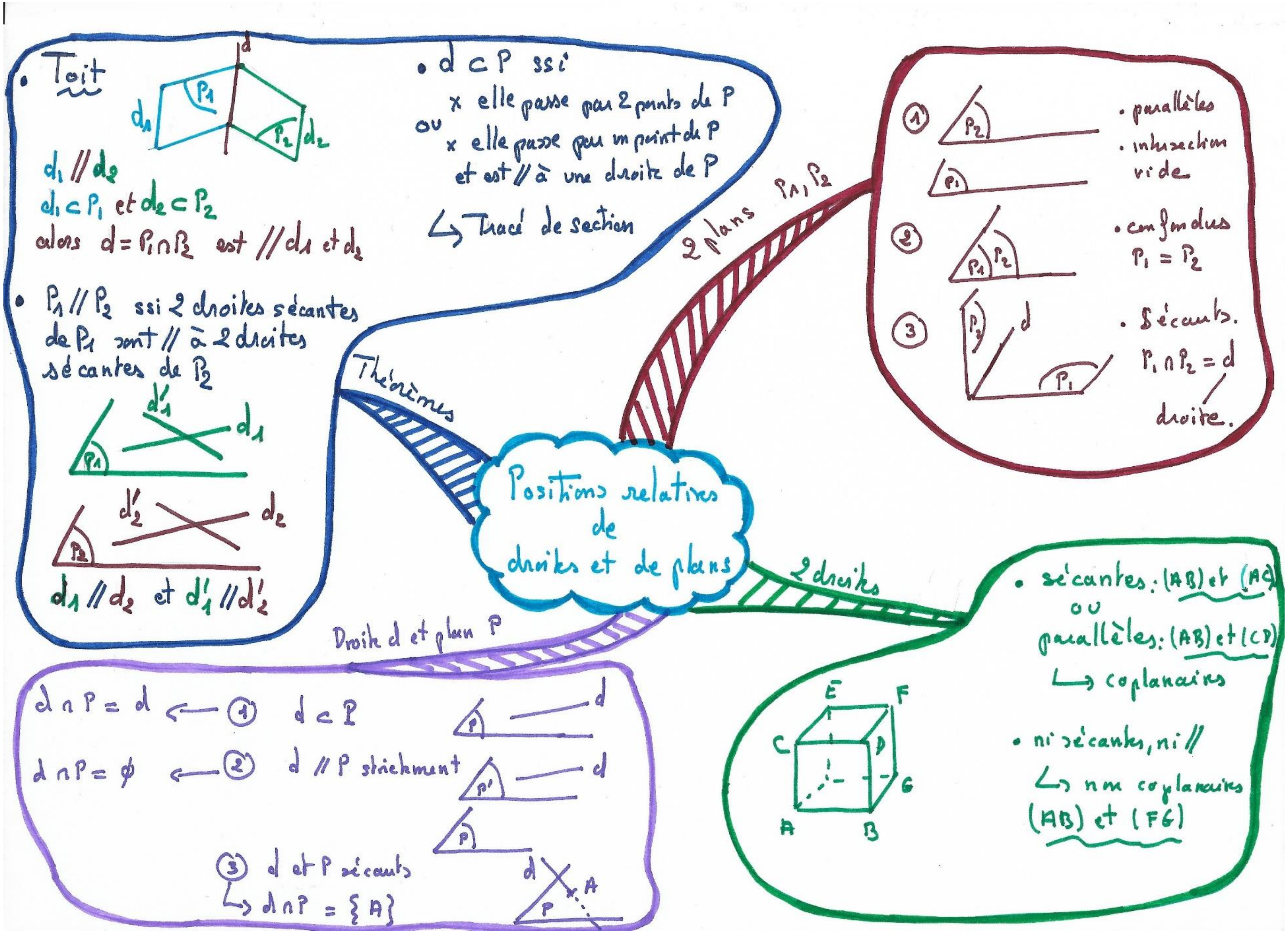
- 1er degré : $uz = v$, $u, v \in \mathbb{C}$ $\iff z = \dfrac{v}{u}$.
- 2nd degré : $a, b, c \in \mathbb{R}$
  $az^2 + bz + c = 0$
  Si $\Delta < 0$: $\dfrac{-b \mp i\sqrt{-\Delta}}{2a}$
- Autre → Séparer partie réelle / partie imaginaire. + système
- $a + ib = a' + ib' \iff \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$

Agnès Rigny www.mathssansstress.fr




$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
(Pythagore)
Duplication :
$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$
Formules
$\cos(-x) = \cos x$
$\sin(-x) = -\sin x$
$\cos(\pi - x) = -\cos x$
$\sin(\pi - x) = \sin x$
$\cos(\pi + x) = -\cos x$
$\sin(\pi + x) = -\sin x$
sin
cos
$\pi - x$
x
$\pi + x$
$-x$
Symétries
Trigonométrie
Angles remarquables
$+$
$(+2k\pi)$
$\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{3}$
$\frac{\pi}{4}$
$\frac{\pi}{6}$
π
$\frac{3\pi}{2}$
$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{1}{2}$
1
-1
0
Equations
$\cos x = \cos a \iff \begin{cases} x = a + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = -a + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$
$\sin x = \sin a \iff \begin{cases} x = a + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = \pi - a + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

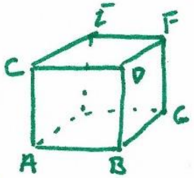
La géométrie dans l'espace


Positions relatives de droites et de plans
Théorèmes
• Toit
d
P_1
P_2
d_1
d_2
$d_1 // d_2$
$d_1 \subset P_1$ et $d_2 \subset P_2$
alors $d = P_1 \cap P_2$ est $//$ d_1 et d_2
• $d \subset P$ ssi
× elle passe par 2 points de P
ou
× elle passe par un point de P et est // à une droite de P
↳ Tracé de section
• $P_1 // P_2$ ssi 2 droites sécantes de P_1 sont // à 2 droites sécantes de P_2
d'_1
d_1
P_1
d'_2
d_2
P_2
$d_1 // d_2$ et $d'_1 // d'_2$
2 plans P_1, P_2
① P_2 P_1
• parallèles
• intersection vide
② P_1 P_2
• confondus
$P_1 = P_2$
③ P_2 d P_1
• Sécants.
$P_1 \cap P_2 = d$
droite.
Droite d et plan P
$d \cap P = d$ ← ① $d \subset P$
d
P
$d \cap P = \emptyset$ ← ② d // P strictement
d
P'
P
③ d et P sécants
↳ $d \cap P = \{A\}$
d
A
P
2 droites
• sécantes : (AB) et (AC)
ou
parallèles : (AB) et (CD)
↳ coplanaires
E
F
C
D
G
A
B
• ni sécantes, ni //
↳ non coplanaires
(AB) et (FG)

Produit scalaire et orthogonalité $\perp$

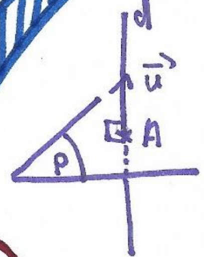
Droites orthogonales / Droites perpendiculaires

- orthogonales = vecteurs directeurs orthogonaux : (AB) et (FC)
- perpendiculaires = orthogonales et sécantes : (AB) et (AC)

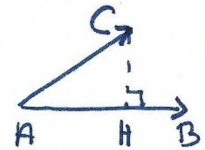


$d = [A, \vec{u}]$
$d \perp P$
$\Longleftrightarrow \vec{u}$ normal à P

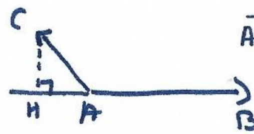
C'est quoi ?



- $\vec{u}$ et $\vec{v}$, représentés par $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
  On se retrouve dans le plan ABC (ou sur une droite, donc dans un plan).
  On a alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ (définition du produit scalaire dans le plan).
  $\vec{u} \perp \vec{v} \Longleftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 0$

- 

  $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB \times AH$

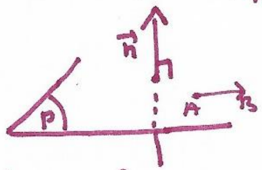
  $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -AB \times AH$

- Dans un repère orthonormé :
  $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$
  $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy' + zz'$

Mêmes propriétés que dans le plan
$\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$
etc.

vecteur normal

- P_1 et P_2 sont orthogonaux ssi $\vec{n_1}\cdot\vec{n_2} = 0$
  avec $\vec{n_1}$ normal à P_1, $\vec{n_2}$ normal à P_2

- 

$\vec{n}$ est normal à P ssi
$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$ pour tous A, B de P.

- $P = \{M$ tel que $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n} = 0\} \longrightarrow$ équation cartésienne
- $P : ax + by + cz + d = 0 \quad \vec{n} = (a, b, c)$

Agnès Rigny www.mathssansstress.fr

Vecteurs et équations de droites et de plans

Équation cartésienne

En repère orthonormé !

- $P : ax+by+cz+d=0$
  $\vec{n} = (a,b,c)$ vecteur normal à P
  $P' : a'x+b'y+c'z+d'=0$
  $P = P' \iff (a,b,c,d)$ proportionnel à (a',b',c',d')
  $P // P' \iff (a,b,c)$ proportionnel à (a',b',c')
- $d = P \cap P'$ avec $P \not\parallel P'$
  $\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$
  avec (a,b,c) et (a',b',c') non proportionnels.

Droites, plans, vecteurs

- P = 3 points non alignés (ABC)
  ou
  1 point et 2 vecteurs non colinéaires $[A, \vec{u}, \vec{v}]$
- d = 2 points $\neq$ (AB)
  ou
  1 point et 1 vecteur $\neq \vec{0}$
  $[A, \vec{u}]$
- $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ coplanaires ssi il existe α, β, γ réels t.q
  $\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}+\gamma\vec{w}=\vec{0}$
- Repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ avec $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ non coplanaires
  $\vec{u} = x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$
  $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix} \iff \vec{OA} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$
  $\vec{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$
  $\vec{u}, \vec{v}$ colinéaires $\iff \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix}$ proportionnels.
  I = milieu de $[A,B]$: $x_I = \frac{1}{2}(x_A + x_B)$ etc.

Représentation paramétrique

- $d = [A, \vec{u}]$
  $M \in d \iff \vec{AM} = t\vec{u}, t \in \mathbb{R}$
  $\iff \begin{cases} x = x_A + t x_u \\ y = y_A + t y_u \\ z = z_A + t z_u \end{cases}, t \in \mathbb{R}$
- $P = [A, \vec{u}, \vec{v}]$
  $M \in P \iff \vec{AM} = \alpha\vec{u}+\beta\vec{v}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
  $\iff \begin{cases} x = x_A + \alpha x_u + \beta x_v \\ y = y_A + \alpha y_u + \beta y_v \\ z = z_A + \alpha z_u + \beta z_v \end{cases}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Repère orthonormé !

- $AB = \|\vec{AB}\| = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v$

Les probabilités

Probabilités Généralités

Formules

- **Probabilité conditionnelle :**

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$ → On sait que B est réalisé

(A sachant B)

- **Probabilités totales**

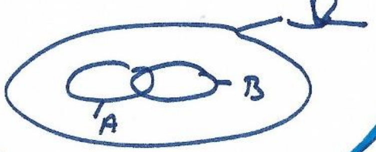
$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \dots$

avec $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup \dots$

et $A_1 \cap A_2 = \emptyset, \dots$

Univers

- Ω l'univers, est composé d'issues
- Les parties de Ω sont les évènements.
- $\emptyset$: partie vide = évènement IMPOSSIBLE.
- Ω : évènement CERTAIN
- $\{\omega\}$: évènement élémentaire (1 seule issue)



Probabilité

$P : A \longrightarrow x \in [0, 1]$

$P(\emptyset) = 0$

$P(\Omega) = 1$

0 : aucune chance de se produire

1 : certain

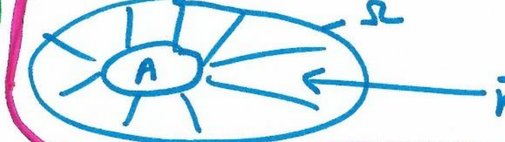
- $P(\{\omega_1\}) + \dots + P(\{\omega_n\}) = 1$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $A \cap B = \emptyset$: A et B incompatibles
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

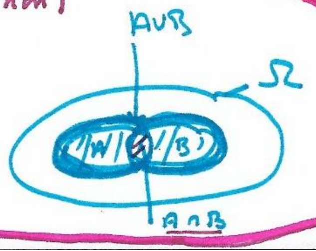
Opérations évènements

$A \cup B$ union (ou)

$A \cap B$ intersection (et)

$\overline{A}$ complémentaire (non)





Agnès Rigny www.mathssansstress.fr

$P(A\cap B) \neq P_A(B)$ ⚠ ⚠

Arbres et Probabilités

Faire l'arbre

- Repérer le nom des évènements.
- Repérer les choix $(A, \bar{A})$ ou (A_1, A_2, A_3)
- Repérer les mots clés "parmi, sachant", et les probas conditionnelles.
- Construire l'arbre et utiliser les formules. (la somme des branches $= 1$)

On fabrique des cadenas avec 2 machines : A_1 et A_2
60% de la production vient de A_1
Parmi les cadenas de la machine A_1, 20% sont defectueux, parmi ceux de la machine A_2, 12% sont défectueux.

- $0,6$ → A_1
  - $0,2$ → D
  - $0,8$ → $\bar{D}$
- $0,4$ → A_2
  - $0,12$ → D
  - $0,88$ → $\bar{D}$

$A, \bar{A}$

- p → A
  - q → B → $P(A\cap B)$
  - $1-q$ → $\bar{B}$
- $1-p$ → $\bar{A}$
  - t → B → $P(\bar{A}\cap B)$
  - $1-t$ → $\bar{B}$

- Principe de la somme :

$P(B) = P(A\cap B) + P(\bar{A}\cap B)$

- Principe du produit

$P(A\cap B) = p(A)\, p_A(B)$

$P(A\cap B) = p \times q$

généralisation

$(A_1, A_2, \ldots A_n)$ système complet

$$p(B) = \sum_{i=1}^{n} p(A_i \cap B)$$

$$p(B) = \sum_{i=1}^{n} p(A_i)\, p_{A_i}(B)$$

Proba de la cause

$$P_B(A) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

$$P_B(A) = \frac{P(A)\, P_A(B)}{P(B)}$$

Agnès Rigny www.mathssansstress.fr

Variables aléatoires discrètes X

Quoi

- $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$
  A chaque issue on associe un nombre.
- Résultat du lancer de dé
  Nombre de succès
  Somme d'argent gagné.
  ...
- $X(\Omega) = \{x_1, \cdots x_n\}$
  $P(X = x_i) = p_i$
  $p_1 + \cdots + p_n = 1$

X	x_1	....	x_n
p_i	p_1	...	p_n

Loi

- Moyenne = Espérance
  $E(X) = p_1 x_1 + \cdots + p_n x_n$.

Variance

$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

$V(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m)^2 p_i$

où $m = E(X)$

Formules

Si :
$x_1 < x_2 < \ldots < x_n$

- $P(X \leq x_k) = P(X = x_1) + \cdots + P(X = x_k)$
- $P(X > x_k) = 1 - P(X = x_k)$
  $= p(X = x_{k+1}) + \cdots + p(X = x_n)$

Lois usuelles

- **Loi binomiale** $\mathcal{B}(n, p)$
  Nombre de succès dans la répétition de n expériences de Bernoulli indépendantes et identiques.
  $E(X) = np$.
- **Loi de Bernoulli** $\mathcal{B}(p)$
  Succès $= 1$
  Echec $= 0$
  $P(X = 1) = p$. $E(X) = p$.
- **Loi uniforme** : Equiprobabilité
  $P(X = x_1) = P(X = x_2) = \cdots = P(X = x_n) = \frac{1}{n}$
  Exemple : Lancer d'un dé. Chaque nombre de 1 à 6 : proba $\frac{1}{6}$

Loi binomiale

$X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$

Formules

$X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$:

$X(\Omega) = \{0, 1, 2, \dots n\}$

$$P(X=k) = \underbrace{\binom{n}{k}}_{\text{nombre de chemins dans l'arbre avec } k \text{ succès}} \underbrace{p^k}_{\text{proba des } k \text{ « succès »}} \underbrace{(1-p)^{n-k}}_{\text{proba des } n-k \text{ « échecs »}}$$

$P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k-1)$

$P(X \leq k) = P(X=0) + \dots + P(X=k)$

Avec la calculatrice.

Ti : . Binomfdp $(n,p,k) = P(X=k)$

. Binomfrep $(n,p,k) = P(X \leq k)$.

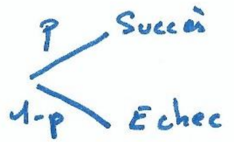
$E(X) = np$

$V(X) = p(1-p)n$

Rédaction : Pour montrer que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$:

On a un schéma de Bernoulli, car on répète n fois ~~des~~ épreuves de Bernoulli, identiques et indépendantes, de proba de succès p

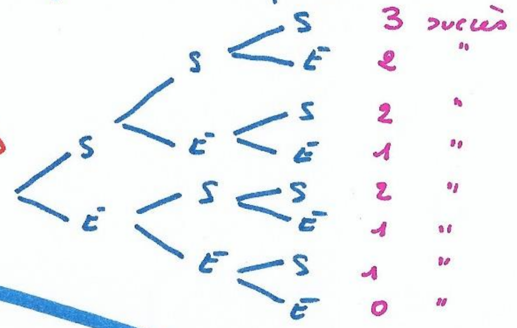
• Épreuve de Bernoulli :



(Pile ou Face)

• Schéma de Bernoulli :

Répétition de $\boxed{n}$ épreuves de Bernoulli, identiques et indépendantes.



$X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$

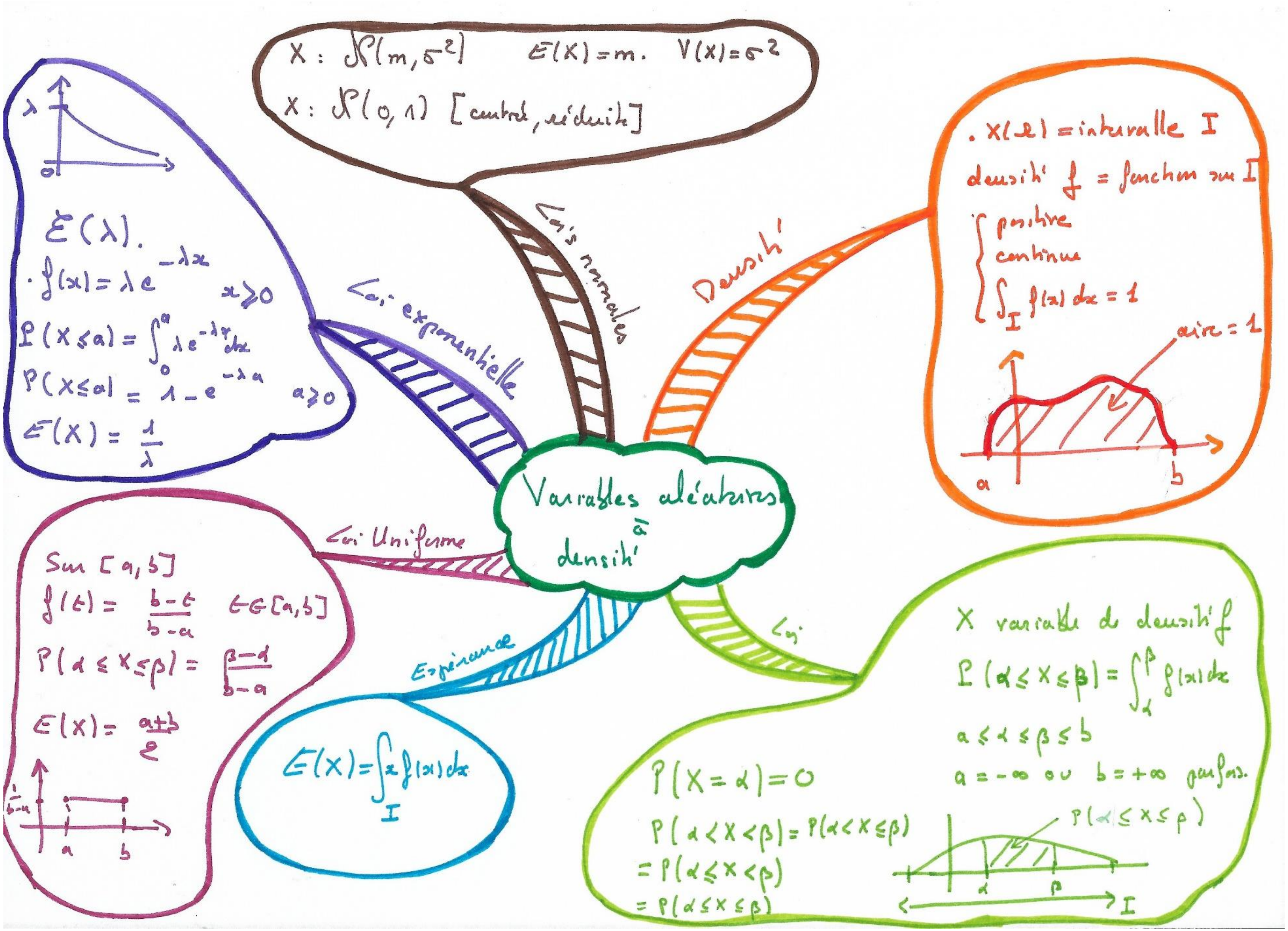
X = nombre de succès.

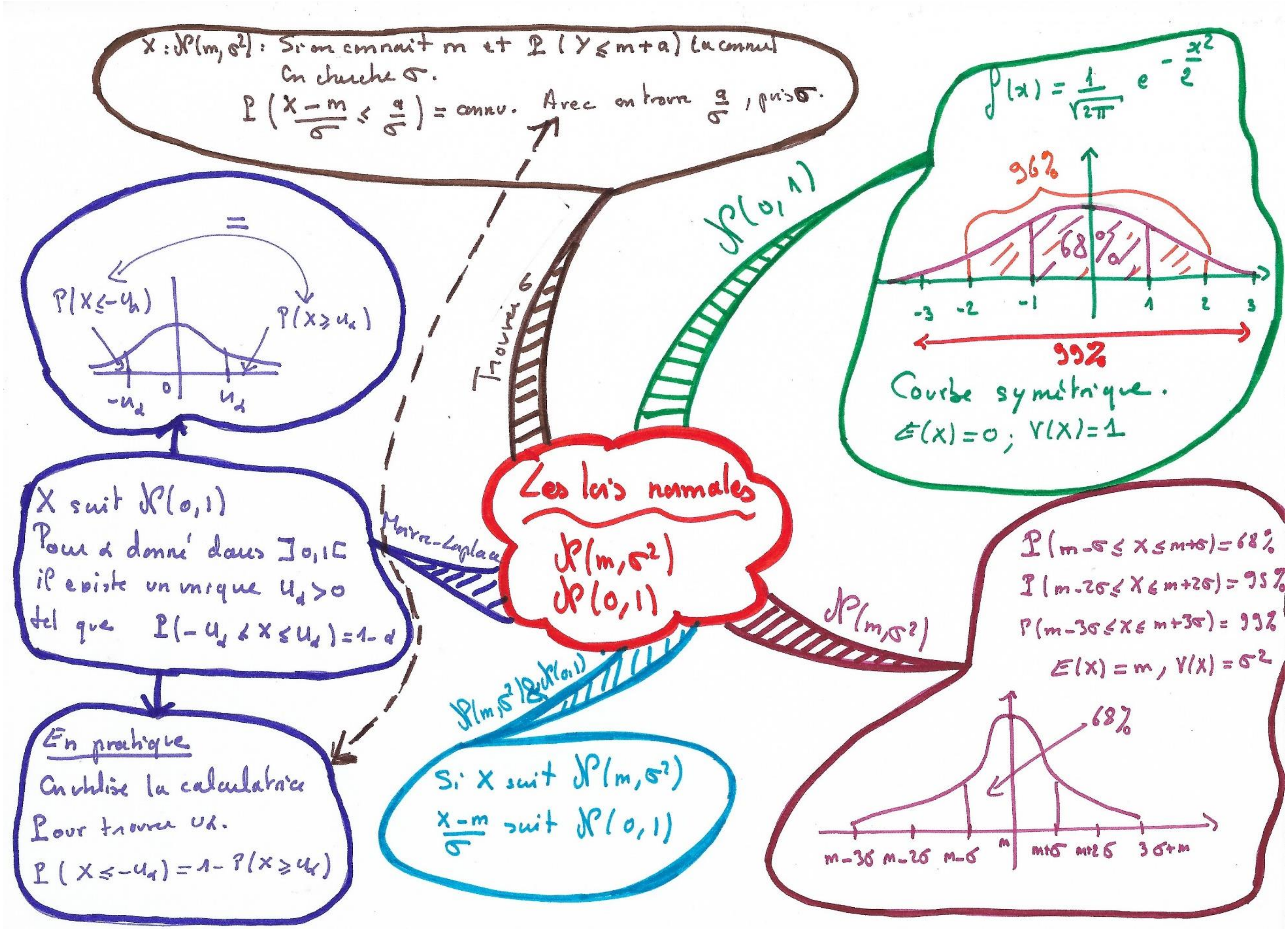
Paramètres de la loi $\begin{cases} n : \text{nombre de répétitions} \\ p : \text{proba de succès} \end{cases}$

⚠ Un « succès » n'a pas de valeur affective !

Exemple : Nombre de « Pile » quand on lance 10 fois une pièce.

Agnès Rigny www.mathssansstress.fr




Les lois normales
$\mathcal{N}(m,\sigma^2)$
$\mathcal{N}(0,1)$
$X : \mathcal{N}(m,\sigma^2)$: Si on connait m et $P(X \leq m+a)$ (connu)
On cherche σ.
$P\left(\frac{X-m}{\sigma} \leq \frac{a}{\sigma}\right)$ = connu. Avec on trouve $\frac{a}{\sigma}$, puis σ.
Trouver σ
$\mathcal{N}(0,1)$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$
96%
68%
-3 -2 -1 1 2 3
99%
Courbe symétrique.
$E(X)=0$; $V(X)=1$
$\mathcal{N}(m,\sigma^2)$
$P(m-\sigma \leq X \leq m+\sigma) = 68\%$
$P(m-2\sigma \leq X \leq m+2\sigma) = 95\%$
$P(m-3\sigma \leq X \leq m+3\sigma) = 99\%$
$E(X) = m$, $V(X) = \sigma^2$
68%
m−3σ m−2σ m−σ m m+σ m+2σ 3σ+m
$\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ & $\mathcal{N}(0,1)$
Si X suit $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$
$\frac{X-m}{\sigma}$ suit $\mathcal{N}(0,1)$
Moivre-Laplace
X suit $\mathcal{N}(0,1)$
Pour α donné dans $]0,1[$
il existe un unique $u_\alpha > 0$
tel que $P(-u_\alpha \leq X \leq u_\alpha) = 1-\alpha$
=
$P(X \leq -u_\alpha)$
$P(X \geq u_\alpha)$
$-u_\alpha$ 0 u_α
En pratique
On utilise la calculatrice
pour trouver u_α.
$P(X \leq -u_\alpha) = 1 - P(X \geq u_\alpha)$

Questions sur $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$

m inconnue

$X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, 20)$

On connait $P(a \leq X \leq b)$, $P(X \leq a)$, …

- Utiliser les symétries

$P(40 \leq X \leq 80) = 0{,}68$

On a $\sigma = 20$ et $P(m-20 \leq X \leq m+20) = 0{,}68$

donc $m = 60$

- On utilise $\mathcal{N}(0,1)$.

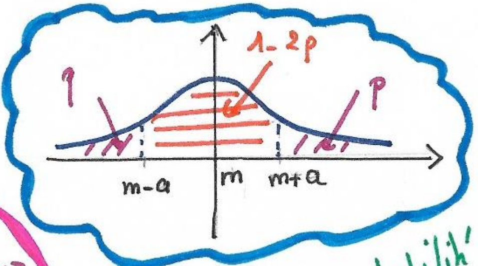
$P(X \leq 110) = 0{,}71$

On a $P\left(\frac{X-m}{20} \leq \frac{110-m}{20}\right) = 0{,}71$

et les valeurs de $\mathcal{N}(0,1)$ donnent : $\frac{110-m}{20} = 0{,}56$

donc $m = 98{,}8$

Calcul de probabilité



- $P(X \leq a)$, $P(X \geq a)$, $P(a \leq X \leq b)$ } avec la machine
- Valeurs remarquables

$P(m-\sigma \leq X \leq m+\sigma) = 0{,}68$

$P(m-2\sigma \leq X \leq m+2\sigma) = 0{,}96$

$P(m-3\sigma \leq X \leq m+3\sigma) = 0{,}99$

- Pour $a > m$:

$P(X \geq m+a) = P(X \leq m-a)$

Calcul de seuil

On connait (l'aire) la probabilité et on cherche a

$P(X \leq a) = \text{connu}$

↑ ?

Avec la machine

ou valeurs remarquables

σ inconnue

Exemple

$X \hookrightarrow \mathcal{N}(100, \sigma^2)$
On sait que $P(X \leq 105) = 0{,}68$
Déterminer σ

On sait que $Y = \frac{X-100}{\sigma}$ suit $\mathcal{N}(0,1)$

On a d'après l'énoncé $P\left(Y \leq \frac{5}{\sigma}\right) = 0{,}68$

Avec la machine (et $\mathcal{N}(0,1)$) on trouve $\frac{5}{\sigma} = 0{,}47$

donc $\sigma = \frac{5}{0{,}47}$

$\sigma = 10{,}63$

Population → individu présentant un caractère avec une probabilité : p

Échantillon représentatif ("au hasard") de taille n. Fréquence observée du caractère : f_n

$n \geqslant 30$
$np \geqslant 5$
$n(1-p) \geqslant 5$

p connu ou donné

Question !

Est-ce que la valeur de p est correcte ?

[ou, est-ce que l'échantillon est représentatif parfois]

Réponse

On détermine I, l'intervalle de fluctuation, qui vérifie : $P(f_n \in I) = 0,95$

$I = \left[p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$

$f_n \in I$

OK, on valide

$f_n \notin I$

Il y a un problème !

$n \geqslant 30$
$n f_n \geqslant 5$
$n(1-f_n) \geqslant 5$

p inconnu

Question si on choisit f_n comme estimateur de p, comme valeur de p, quel est l'intervalle ou fait dans lequel est p, à 95 % ? [→ Sondages]

"Fourchette de valeurs".

Réponse

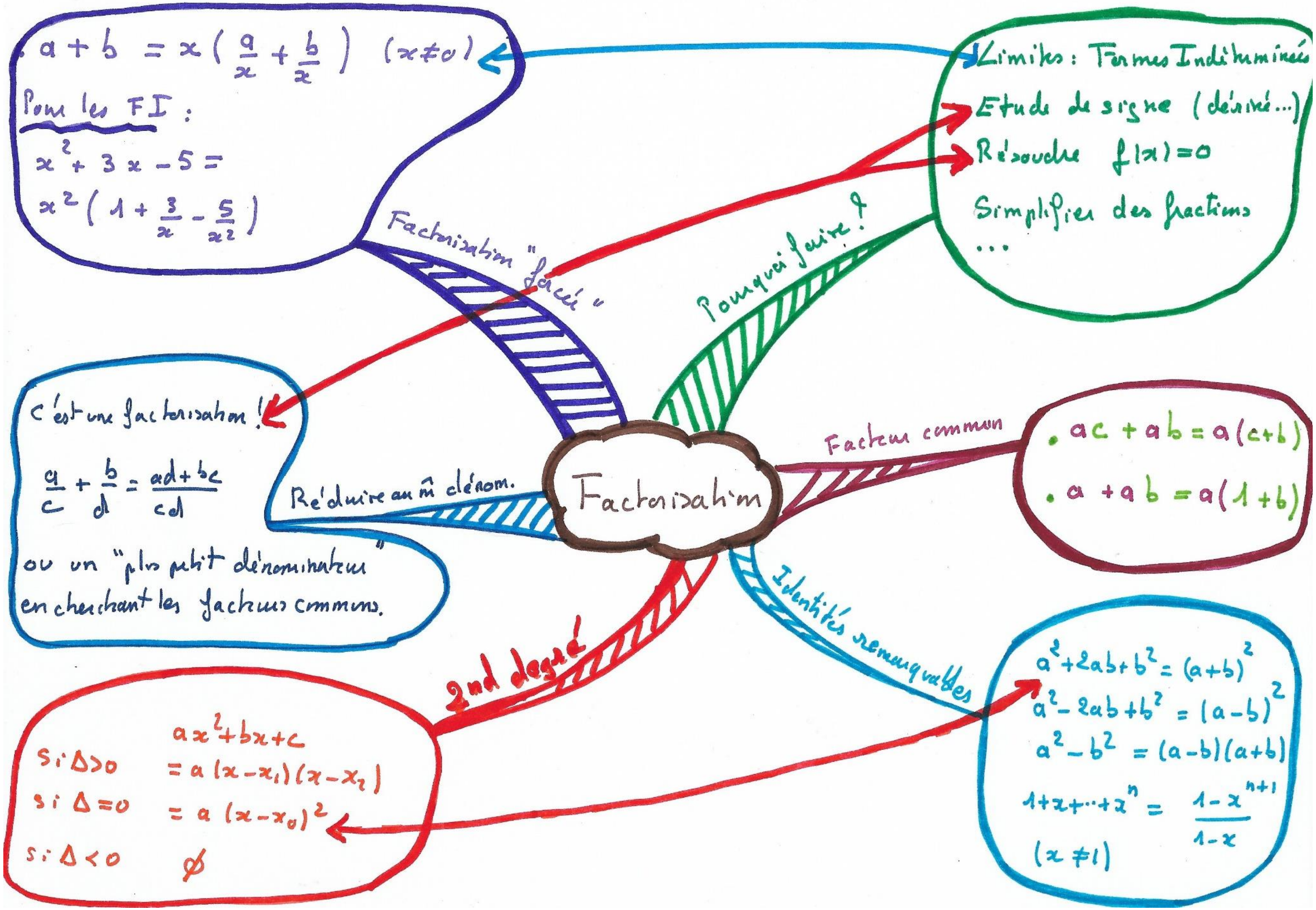
p est dans $\left[f_n - \frac{1}{\sqrt{n}} , f_n + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$ avec une probabilité de 95 %.

intervalle de confiance.

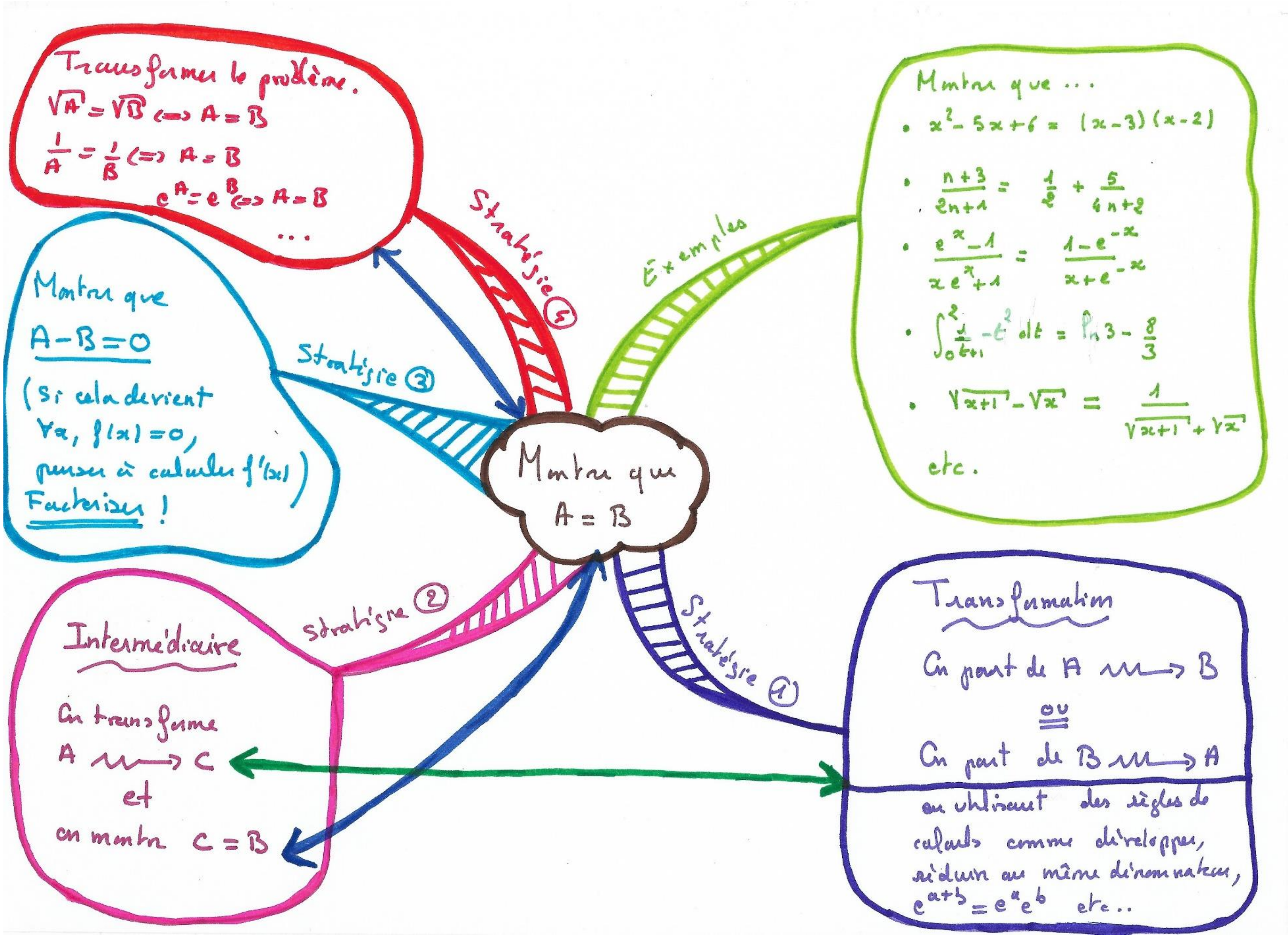
On peut aussi choisir

$\left[f_n - 1,96 \frac{\sqrt{f_n(1-f_n)}}{\sqrt{n}} ; f_n + 1,96 \frac{\sqrt{f_n(1-f_n)}}{\sqrt{n}} \right]$

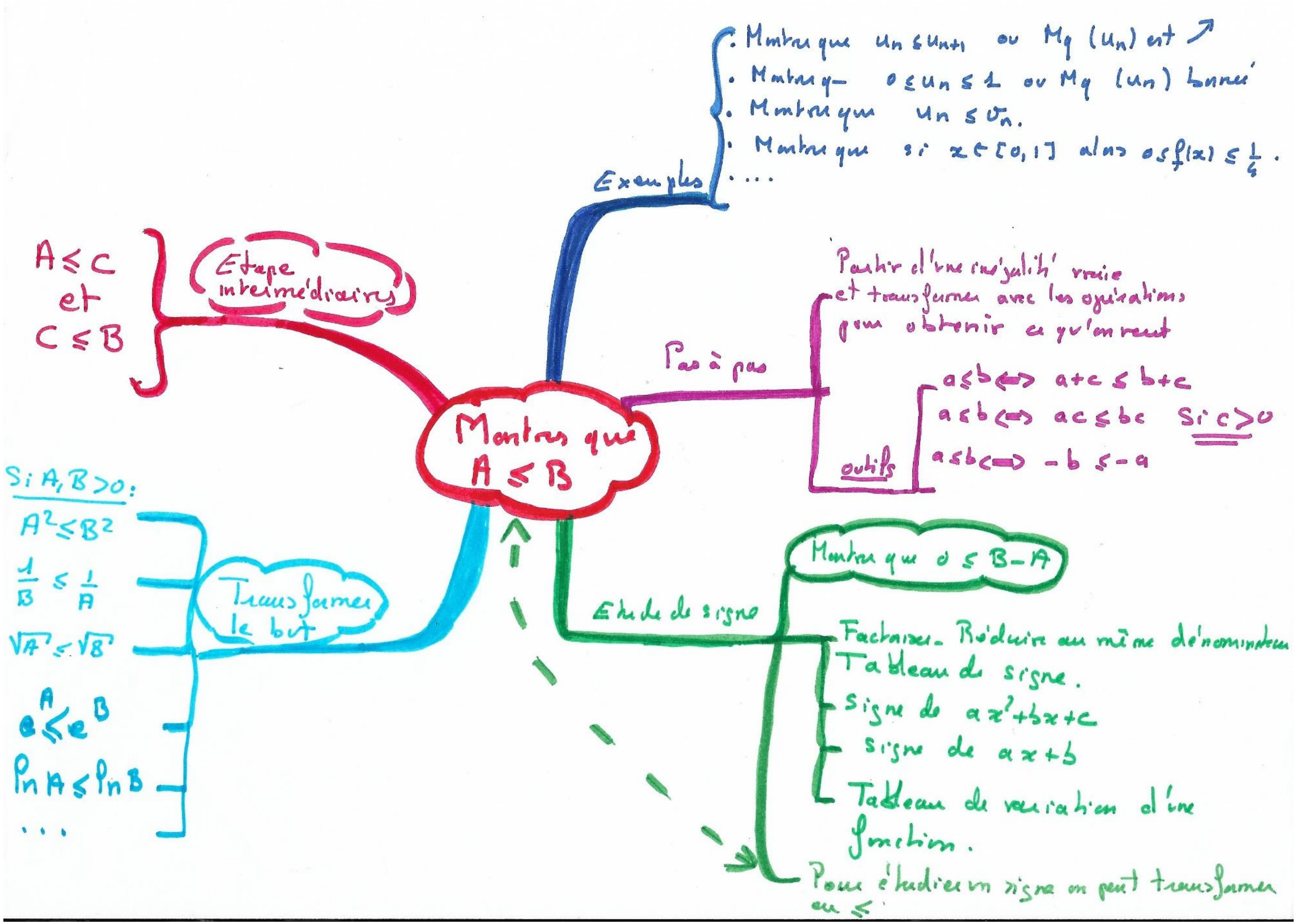
Outils mathématiques

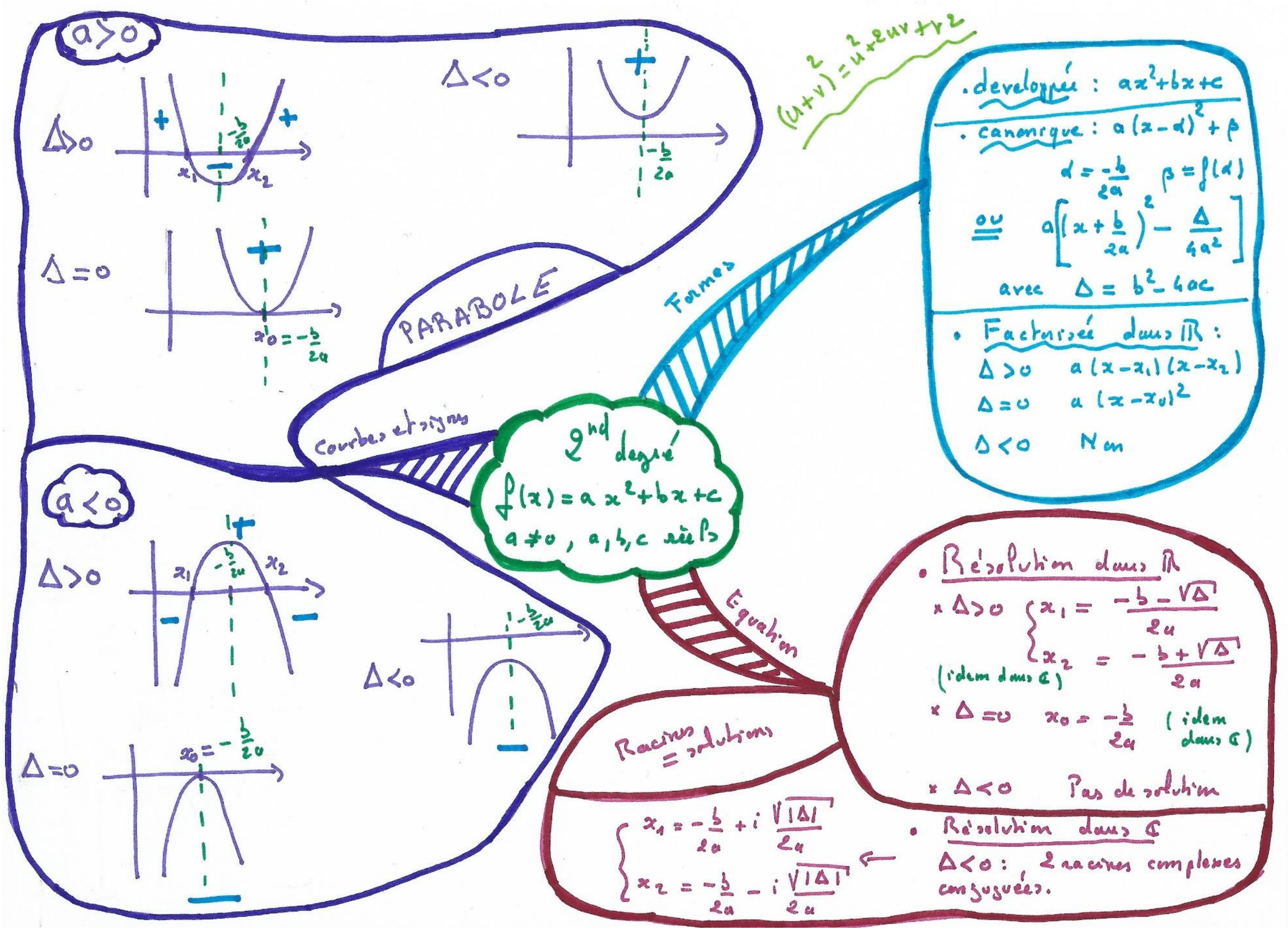

Factorisation
Factorisation "facile"
$a+b = x\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{x}\right)$ $(x \neq 0)$
Pour les FI :
$x^2+3x-5 =$
$x^2\left(1+\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2}\right)$
Pourquoi faire ?
Limites : Formes Indéterminées
Etude de signe (dérivée...)
Résoudre $f(x)=0$
Simplifier des fractions
...
Facteur commun
$ac+ab=a(c+b)$
$a+ab=a(1+b)$
Identités remarquables
$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$
$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$
$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$
$1+x+\dots+x^n=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$
$(x \neq 1)$
2nd degré
ax^2+bx+c
si $\Delta>0$ $=a(x-x_1)(x-x_2)$
si $\Delta=0$ $=a(x-x_0)^2$
si $\Delta<0$ $\emptyset$
Réduire au m̂ dénom.
C'est une factorisation !
$\frac{a}{c}+\frac{b}{d}=\frac{ad+bc}{cd}$
ou un "plus petit dénominateur"
en cherchant les facteurs communs.

Agnès Rigny www.mathssansstress.fr



MATHS SANS STRESS
Agnès Rigny www.mathssansstress.fr




2nd degré
$f(x) = ax^2 + bx + c$
$a \neq 0$, a, b, c réels
PARABOLE
Courbes et signes
$a > 0$
$\Delta > 0$
+
+
−
x_1
x_2
$-\frac{b}{2a}$
$\Delta = 0$
+
$x_0 = -\frac{b}{2a}$
$\Delta < 0$
+
$-\frac{b}{2a}$
$a < 0$
$\Delta > 0$
+
−
−
x_1
x_2
$-\frac{b}{2a}$
$\Delta < 0$
$-\frac{b}{2a}$
−
$\Delta = 0$
$x_0 = -\frac{b}{2a}$
−
Formes
$(u+v)^2 = u^2 + 2uv + v^2$
• développée : $ax^2 + bx + c$
• canonique : $a(x-\alpha)^2 + \beta$
$\alpha = \frac{-b}{2a}$ $\beta = f(\alpha)$
ou $a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$
avec $\Delta = b^2 - 4ac$
• Factorisée dans $\mathbb{R}$:
$\Delta > 0$ $a(x-x_1)(x-x_2)$
$\Delta = 0$ $a(x-x_0)^2$
$\Delta < 0$ Non
Equation
• Résolution dans $\mathbb{R}$
× $\Delta > 0$ $\begin{cases} x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$
(idem dans $\mathbb{C}$)
× $\Delta = 0$ $x_0 = -\frac{b}{2a}$ (idem dans $\mathbb{C}$)
× $\Delta < 0$ Pas de solution
Racines = solutions
• Résolution dans $\mathbb{C}$
$\Delta < 0$: 2 racines complexes conjuguées.
$\begin{cases} x_1 = -\frac{b}{2a} + i\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a} \\ x_2 = -\frac{b}{2a} - i\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a} \end{cases}$

Équations de droites dans le plan

Cas de la tangente

Tangente à C_f au point d'abscisse a

$$y = \underbrace{f'(a)}_{\text{coefficient directeur.}}(x-a) + f(a)$$

→ détermination de $f'(a)$ connaissant 2 points de la tangente.

Détermination de m et p

$(d) = (AB)$ ($\not\parallel Oy$)

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

$$p = y_A - m\,x_A$$

Équations cartésiennes

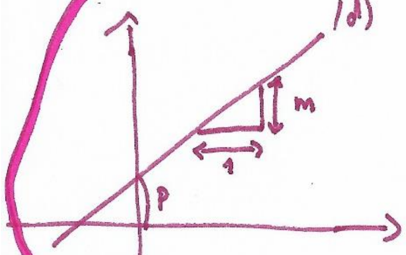
- $(d) : ax + by + c = 0$
  $\vec{u} = (-b, a)$ vecteur directeur
- $(d') : a'x + b'y + c' = 0$

→ $(d) \parallel (d')$: (a, b) et (a', b') proportionnels
$\iff ab' - ba' = 0$

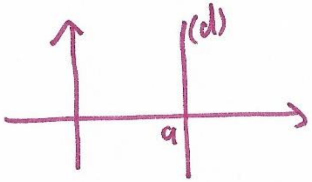
→ $(d) = (d')$:
(a, b, c) et (a', b', c') proportionnels

→ $(d) \cap (d') = \{A\}$ si $(d) \not\parallel (d')$
Les coordonnées de A solution de
$$\begin{cases} ax + by = -c \\ a'x + b'y = -c' \end{cases}$$

Équation réduite



- Si $(d) \parallel Oy$:
  $x = a$



- Si $(d) \not\parallel Oy$: $y = mx + p$
  Unique équation
  m = coefficient directeur
  p = ordonnée à l'origine

$(d') : y = m'x + p'$

$(d) \parallel (d') \iff m = m'$

$(d) = (d') \iff m = m'$ et $p = p'$