Agnès Rigny www.mathssansstress.fr

Dérivées

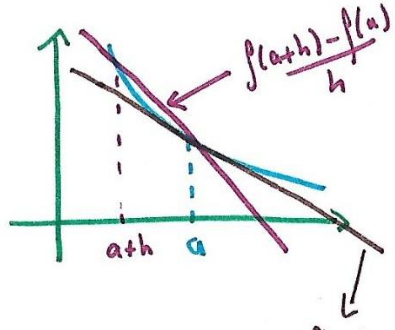
Revoir les équations de droites

Sert à :

- Étudier des fonctions
- Trouver des max, min.
- Préciser la courbe (tangente)
- valeur approchée de $f(a+h)-f(a) \simeq f'(a)\cdot h$

Quoi ?

- $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$



Lecture graphique

- La tangente en a : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

$\begin{cases} \text{Droite passant par } (a, f(a)) \\ \text{coefficient directeur : } f'(a) \end{cases}$

Tableau de variation

$f' \geq 0 \Rightarrow f \nearrow$

$f' \leq 0 \Rightarrow f \searrow$

On s'intéresse au signe de $f'(x) \longrightarrow$ factoriser !

max ou min $\longrightarrow f'(a) = 0$ ou au bord.

x					
$f'(x)$	+	0	−	0	+
f	↗		↘		↗

Fonction f'

- Opérations

$(ku)' = ku'$

$(u+v)' = u' + v'$

$(uv)' = u'v + v'u$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$

$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$

$\big(f(ax+b)\big)' = a f'(ax+b)$

- $x \longrightarrow f'(x)$
- Dérivées usuelles

$(x^n)' = n x^{n-1}$ — $(u^n)' = u' n u^{n-1}$

$(e^x)' = e^x$ — $(e^u)' = u' e^u$

$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ — $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

$(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ — $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

$(\cos x)' = -\sin x$ — $(\cos(u))' = -u' \sin(u)$

$(\sin x)' = \cos x$ — $(\sin(u))' = u' \cos(u)$

Limite pour les fonctions

Définitions

- $f(x) \to \ell$ quand $x \to \mp\infty$

  $\forall \varepsilon > 0$, $\exists M \overset{<}{>} 0$, si $x > M$ alors $|f(x) - \ell| < \varepsilon$

- $f(x) \to \ell$ quand $x \to a$

  $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \alpha > 0$, si $|x - a| < \alpha$ alors $|f(x) - \ell| < \varepsilon$

- $f(x) \to \overset{-}{+}\infty$ quand $x \to +\infty$

  $\left.\begin{matrix}\forall M > 0 \\ \forall M < 0\end{matrix}\right\}$, $\exists A > 0$, si $x > A$ alors $\left\{\begin{matrix} f(x) > M \\ f(x) < M \end{matrix}\right.$

- $f(x) \to \overset{-}{+}\infty$ quand $x \to -\infty$

  $\left\{\begin{matrix}\forall M > 0, \\ \forall M < 0\end{matrix}\right.$ $\exists A < 0$, si $x < A$ alors $\left\{\begin{matrix} f(x) > M \\ f(x) < M \end{matrix}\right.$

- $f(x) \to \overset{-}{+}\infty$ quand $x \to a$

  $\left\{\begin{matrix}\forall M > 0 \\ \forall M < 0\end{matrix}\right.$, $\exists \alpha > 0$, si $|x - a| < \alpha$ alors $\left\{\begin{matrix} f(x) > M \\ f(x) < M \end{matrix}\right.$

Quoi ?

Généralités

Comme pour les suites

$+ ; \times ; \div$ FI, …

Inégalités

- Si $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ pour $x \in I$ intervalle
- si $f(x) \to \ell$ quand $x \to a$ et $h(x) \to \ell$ quand $x \to a$

<u>Alors</u> $g(x) \to \ell$ quand $x \to a$

- Si $f(x) \leq g(x)$ pour $x \in I$
- Si $f(x) \to +\infty$ quand $x \to a$

<u>alors</u> $g(x) \to +\infty$

…

Fonction composée

$\lim\limits_{x \to a} f(u(x)) = \ell$

si $X = u(x) \to b$ quand $x \to a$

et $f(X) \to \ell$ quand $X \to b$

<u>exemple</u>

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x^2+1} = +\infty$

car, $X = x^2 + 1$:

$\lim\limits_{x \to +\infty} X = +\infty$

$\lim\limits_{X \to +\infty} e^X = +\infty$

Asymptotes

- 

$y = \ell$

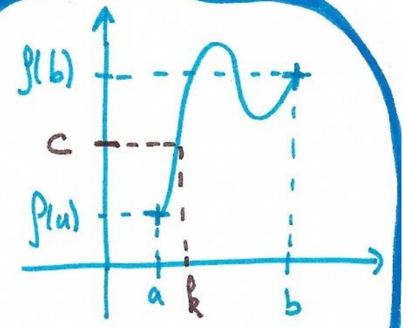
en $+\infty$

- 

$x = a$

Théorème des Valeurs Intermédiaires

Quoi ?



- c est une valeur intermédiaire entre f(a) et f(b)
- f est continue (dérivable ou)

Alors il existe k entre a et b tel que $f(k)=c$

Corollaire ⚠

Si f est en plus strictement monotone, alors k est unique

Rédaction

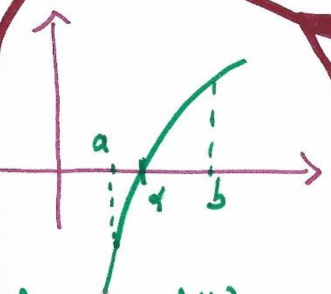
Avec un tableau de variation.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f	<0	↗	α	↗	>0

- f est continue sur $]-\infty;+\infty[$
- $0 \in]\lim_{-\infty} f, \lim_{+\infty} f[$
- f est strictement croissante.

Donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique α tel que $f(\alpha)=0$.

Encadrement



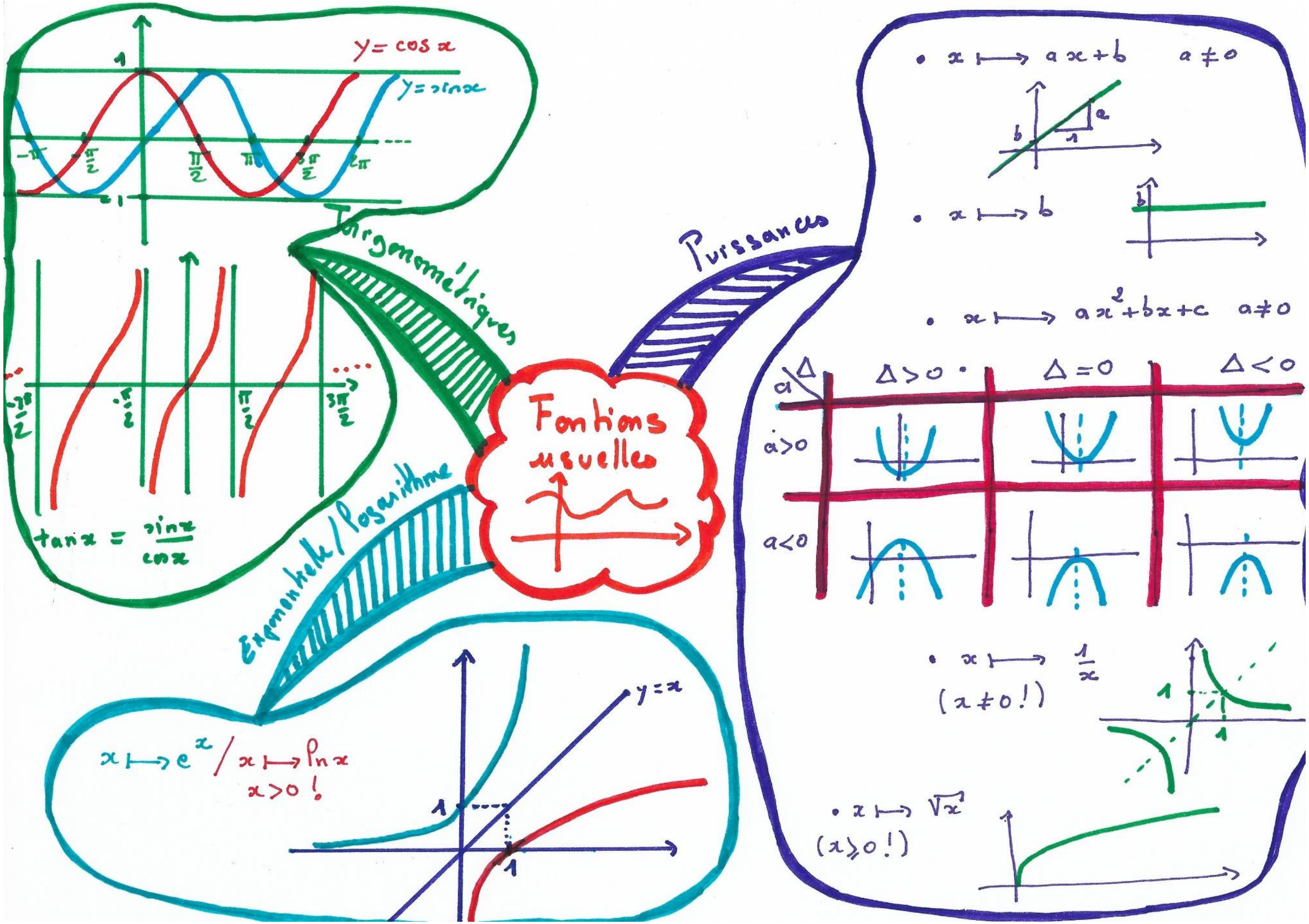
$f(a)<0<f(b)$
f ↗ strict
$\exists!\ \alpha$ tel que $f(\alpha)=0$.
$a<\alpha<b$.

Faire une table de valeurs pour encadrer α.

Pour qui !

Pour répondre aux questions sur
- le nombre de solutions d'une équation du type $f(x)=c$
- Montrer qu'il existe α tel que $f(\alpha)=c$
- Montrer qu'il existe un unique α tel que ...

Agnès Rigny www.mathssansstress.fr



Fonction exponentielle exp, e

Quoi ?

- La seule fonction solution de : $f' = f$, $f(0) = 1$
- Transforme une somme en produit
- Toujours strictement positive $e^x > 0$!
- Notée : e^x ou $\exp(x)$

exponentielle et logarithme

$y = e^x \iff \ln y = x$

Équations/Inéquations

$e^a = e^b \iff a = b$

$e^a > e^b \iff a > b$

ex : $e^{x^2-4} = 1 \iff x^2 - 4 = 0.$

Formules

$e^{a+b} = e^a \times e^b$ → la base

$e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$

$e^{nx} = (e^x)^n \quad n \in \mathbb{Z}$

$e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$

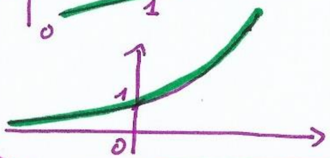
- $e^{\frac{1}{2}x} = \sqrt{e^x}$
- $e^{\frac{x}{n}} = (e^x)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{e^x}$

Fonction

$(e^x)' = e^x$

$(e^u)' = u'e^u$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
e^x	0 ↗	1	↗ $+\infty$



$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty \qquad \lim\limits_{x \to -\infty} x e^x = 0$

Fonction $\ln$

Logarithme Népérien

Inéquations Équations

- **Equations**

$$\begin{cases} e^x = a \iff x = \ln a & a>0 \\ \ln x = a \iff x = e^a & \\ \ln(a) = \ln(b) \iff a = b & a,b>0 \end{cases}$$

- **Inéquations**

$e^x \geq a \iff x \geq \ln(a) \quad (a>0)$

$\ln x \geq a \iff x \geq e^a$

$e^n \geq a \iff n \geq \ln(a)$ (seuils)

Formules

$a, b > 0$!

$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$

$\ln(1) = 0$

$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$

$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$

$\ln(a^n) = n\ln(a) \quad n \in \mathbb{Z}$

Avec e^x

$$\begin{cases} e^{\ln(x)} = x & x>0 \\ \ln(e^y) = y & y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

- $a = e^b \iff \ln a = b$

  $a>0, \; b \in \mathbb{R}$

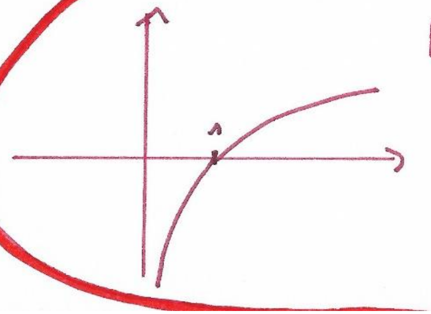
- $\ln(1) = 0, \; \ln(e) = 1$

Fonction

$\ln'(x) = \frac{1}{x}$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

x	0		1		$+\infty$
$\ln$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$



$\lim\limits_{x \to 0^+} x\ln(x) = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$

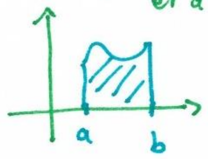
$\int_a^b f(t)\,dt$

Primitives

$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ est LA primitive de f qui s'annule en a

Quoi

- Aire si $f \geqslant 0$ et $a < b$.



- $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$ si $F' = f$

(dans tous les cas)

Liens

- Fonction
- Dérivée
- Géométrie

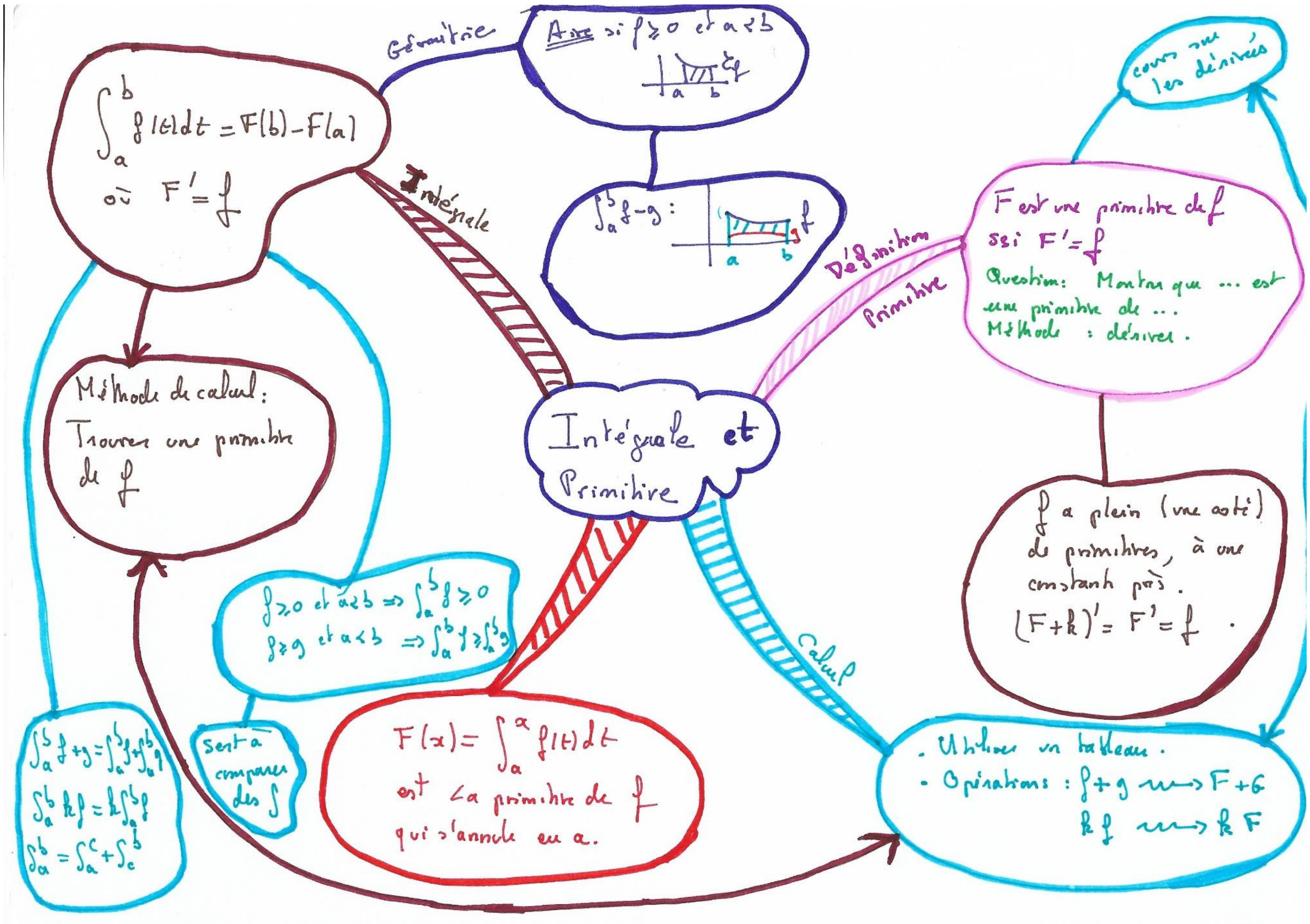
$\leqslant$

- Si $f \geqslant 0$ et $a \leqslant b$: $\int_a^b f(t)\,dt \geqslant 0$
- Si $f \geqslant g$ et $a \leqslant b$: $\int_a^b f(t)\,dt \geqslant \int_a^b g(t)\,dt$.

Sert à démontrer des inégalités sur des $\int$

Opérations

- $\int_a^b k f(t)\,dt = k \int_a^b f(t)\,dt$
- $\int_a^b f(t) + g(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt$
- Chasles : $\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b g(t)\,dt$
- $\int_a^b = -\int_b^a$


Intégrale et Primitive
Géométrie
Aire si $f \geq 0$ et $a < b$
a b f
$\int_a^b f-g$:
a b f g
Intégrale
$\int_a^b f(t)dt = F(b)-F(a)$
où $F' = f$
Méthode de calcul : Trouver une primitive de f
$f \geq 0$ et $a < b \Rightarrow \int_a^b f \geq 0$
$f \geq g$ et $a < b \Rightarrow \int_a^b f \geq \int_a^b g$
Sert à comparer des $\int$
$\int_a^b f+g = \int_a^b f + \int_a^b g$
$\int_a^b kf = k\int_a^b f$
$\int_a^b = \int_a^c + \int_c^b$
$F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est la primitive de f qui s'annule en a.
Définition Primitive
F est une primitive de f ssi $F' = f$
Question : Montrer que … est une primitive de …
Méthode : dériver.
cours sur les dérivées
f a plein (une ∞té) de primitives, à une constante près.
$(F+k)' = F' = f$.
Calcul
· Utiliser un tableau.
· Opérations : $f+g \rightsquigarrow F+G$
$kf \rightsquigarrow kF$

Agnès Rigny www.mathssansstress.fr

Intégrale $\neq$ Primitive

Intégrale

$\int_a^b f(t)\,dt$ c'est un NOMBRE.

~~Dériver une intégrale~~

Points communs

- $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$ où $F' = f$
- $x \longmapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est LA primitive de f qui s'annule en a

Primitive

Une primitive c'est une FONCTION.

f a une infinité de primitives.

$F' = f$

$(F+k)' = f$ pour tout k

Agnès Rigny www.mathssansstress.fr